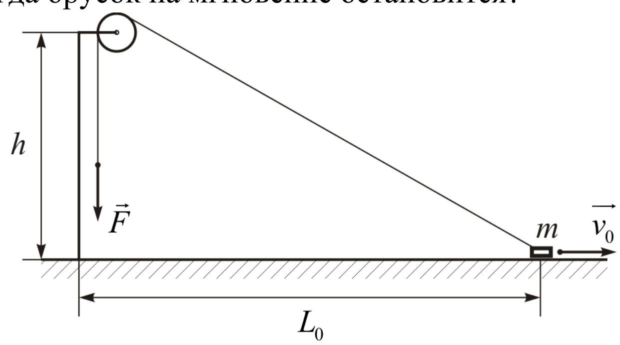
10 класс

Задача 10.1

Условие

Маленький брусок массой m находится на гладкой горизонтальной поверхности на расстоянии L_0 от вертикального столба, на котором на высоте h на коротком держателе закреплён маленький невесомый блок с неподвижной горизонтальной осью. Невесомая нерастяжимая длинная нить одним концом прикреплена к бруску, перекинута через блок и натянута с постоянной силой F. Трения в оси блока нет. В начальный момент брусок скользит по поверхности и имеет скорость v_0, направленную от столба. Каким будет расстояние L_1 от столба до бруска в тот момент, когда брусок на мгновение остановится?



Возможное решение

Кинетическая энергия бруска изменяется, так как сила F совершает работу. Поскольку сила, действующая на брусок всегда направлена вдоль нити к блоку, то работа силы равна произведению модуля силы на изменение длины участка нити между бруском и блоком, взятому со знаком минус. Когда брусок остановится, его кинетическая энергия будет равна нулю, поэтому

$$\frac{mv_0^2}{2} = F\left(\sqrt{L_1^2 + h^2} - \sqrt{L_0^2 + h^2}\right) \Longrightarrow L_1 = \sqrt{\left(\frac{mv_0^2}{2F} + \sqrt{L_0^2 + h^2}\right)^2 - h^2}$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что работа силы F равна произведению величины силы на изменение длины участка нити между бруском и блоком, взятому со знаком минус ....2 балла
Записан закон изменения механической энергии ....1 балл
Получен ответ ....2 балла

Задача 10.2

Условие

Астроном-любитель Вася следит за движением двух искусственных спутников Земли, летающих на одной и той же высоте $h = 300$ км над экватором по круговым орбитам. Спутники пролетают точно над наблюдателем. Вася измеряет периоды движения этих спутников (промежутки времени между последовательными «пролётами» над ним). Оказалось, что эти периоды заметно отличаются. Какова разница этих периодов?

Модуль ускорения свободного падения у поверхности Земли $g = 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, радиус Земли $R_0 = 6{,}4 \cdot 10^6$ м.

Возможное решение

Высота спутников постоянна, значит, их орбиты круговые. Радиусы орбит одинаковы, значит, времена оборотов спутников вокруг Земли также одинаковы. Разница наблюдаемых Васей периодов возникает из-за суточного вращения Земли (спутники летят в разные стороны). Пусть ω — угловая скорость вращения спутников, ω_0 — угловая скорость вращения Земли.

За сутки Земля делает один оборот, поэтому

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{24\ \text{ч}} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Спутники движутся по орбитам с постоянным по модулю ускорением которое можно найти из закона всемирного тяготения. Это же ускорение является для них центростремительным

$$\omega^2(R_0 + h) = g\frac{R_0^2}{(R_0 + h)^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{g\frac{R_0^2}{(R_0 + h)^3}} = 1{,}16 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Относительно Васи один спутник вращается с угловой скоростью $\omega - \omega_0$, а другой с угловой скоростью $\omega + \omega_0$. Разность наблюдаемых периодов равна

$$\frac{2\pi}{\omega - \omega_0} - \frac{2\pi}{\omega + \omega_0} = \frac{4\pi\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \approx 12\ \text{мин}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Исходя из известной высоты орбиты, найдена угловая скорость спутника, либо линейная скорость спутника, либо период обращения спутника..2 балла

Получено выражение для разности периодов (не обязательно через угловые скорости, можно, например, выразить её через периоды обращения спутников и Земли).....................2 балла

Получен правильный численный ответ...1 балл

Задача 10.3

Условие

У школьника Васи есть много одинаковых медных монет с температурой t_0 и теплоизолированный цилиндрический сосуд с водой, начальная температура которой тоже равна t_0. Вася по одной опускает монеты в воду, отпуская их без начальной скорости с высоты текущего уровня воды. Площадь дна сосуда S, начальный уровень воды H, масса одной монеты m, удельная теплоёмкость меди c, плотность меди равна ρ. Плотность и удельная теплоёмкость воды равны ρ_0 и c_0. До какой максимальной температуры можно нагреть воду таким способом? Сколько нужно бросить в воду монет, чтобы изменение её температуры было вдвое меньше максимально возможного? При решении задачи считайте, что монеты занимают весь объём ниже определенного уровня, то есть образуют на дне сплошной медный цилиндр (промежутки между монетами можно не учитывать). Теплоемкостью сосуда можно пренебречь.

Возможное решение

Поскольку промежутки между монетами можно не учитывать, то расстояния от верхнего края воды до верхнего края объёма, занимаемого монетами, всегда будет равно H. Нагревание жидкости будет происходить за счёт потенциальной энергии монет. При падении одной монеты, она опускается на глубину H, но такой же объём воды поднимается на высоту H, как бы занимая место монеты. То есть тепло, выделяемое при падении одной монеты, равно

$$Q = mgH - \frac{\rho_0}{\rho} mgH = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) mgH.$$

Это тепло идёт на нагрев всего содержимого сосуда, в том числе и последней монетки. Максимальную конечную температуру t в сосуде можно найти, если предположить, что вся выделяющаяся теплота идёт на нагрев одной последней монетки. Действительно, при падении очередной монеты вода и все ранее утонувшие монеты немного нагреваются. Поэтому каждый раз температура содержимого сосуда немного повышается. Пусть содержимое сосуда нагрелось до максимально возможной температуры. Это означает, что при бросании очередной монеты вся выделившаяся при ее падении теплота пойдет на нагревание как раз этой монеты до максимальной установившейся температуры содержимого сосуда (т.к. иначе получилось бы, что максимальная температура содержимого еще не достигнута). Значит

$$\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) mgH = cm(t - t_0) \Longrightarrow t = t_0 + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{gH}{c}.$$

Количество монет N, которое необходимо бросить, чтобы нагреть воду до температуры $t_1 = \frac{t+t_0}{2}$, найдём из уравнения теплового баланса

$$NQ = (Ncm + c_0\rho_0 SH)(t_1 - t_0) \Longrightarrow N = \frac{c_0\rho_0 SH}{cm}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Получено выражение для тепла Q, выделяемого при падении одной монеты ....1 балл
Найдена максимальная конечная температура t ....2 балла
Записано уравнение теплового баланса (для нахождения N) ....1 балл
Найдено количество монет N ....1 балл

Задача 10.4

Условие

Точечный заряд $q = 10$ нКл помещён на расстоянии $L = 1$ м от центра проводящего заземлённого шара радиусом $R = 20$ см. Найдите заряд шара Q.

Возможное решение

Поскольку шар заземлён, потенциал любой его точки равен нулю. В том числе, и потенциал в центре шара

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{L} + \frac{Q}{R}\right) = 0.$$

Здесь используется формула для потенциала точечного заряда. В проводниках заряд может находиться только на их поверхности, а расстояние от любой точки поверхности шара до его центра одинаково. Окончательно

$$Q = -\frac{R}{L}q = -2 \text{ нКл}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что потенциал шара равен нулю ....1 балл
Указано, что в шаре заряд находится только на поверхности ....1 балл
Записано выражение для потенциала в центре шара, создаваемого зарядом q ....1 балл
Записано выражение для потенциала в центре шара, создаваемого зарядами шара.........1 балл
Получен ответ ....1 балл

Задача 10.5

Условие

Полностью заполненная водой ванна с вертикальными боковыми стенками освобождается от воды через открытое сливное отверстие в её горизонтальном дне за время τ. Отверстие расположено в середине дна, и его площадь во много раз меньше площади поперечного сечения ванны. При открытом сливном отверстии вода свободно (без труб) выливается на пол. Если в ванну сначала насыпать до краев мелкую гальку, а затем заполнить ванну водой, то в этом случае ванна опорожняется за время $\tau/2$. При этом камешки гальки не закрывают сливного отверстия! Через какое время опорожнится ванна, если 75% гальки убрать (то есть оставшиеся камушки будут находиться в нижней четверти ванны) и снова заполнить её водой до краёв? Вязкостью воды можно пренебречь. При решении задачи считайте, что камешки гальки уменьшают площадь поперечного сечения ванны, доступную для воды.

Возможное решение

Скорость вытекания воды через небольшое отверстие в дне зависит от уровня жидкости в ванне. Эта зависимость следует из закона сохранения механической энергии: небольшая масса воды, находившаяся в тонком верхнем слое жидкости «исчезает», а из сливного отверстия, находящегося на расстоянии h ниже, выливается такое же количество воды со скоростью V: $mgh = mV^2/2$. То есть $V = \sqrt{2gh}$ (формула Торричелли). Значит, высота уровня жидкости убывает со скоростью, которая зависит от уровня воды; при этом указанная скорость убывания уровня обратно пропорциональна площади поперечного сечения ванны S и прямо пропорциональна площади сливного отверстия s. Эта зависимость выражается уравнением, которое представляет собой условие сохранения массы вытекающей из ванны воды:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -\frac{s}{S}\sqrt{2gh}.$$

Известно, что из заполненной полностью ванны вода вытекает за время τ. Найдём за какое время вода вытечет из ванны, заполненной на четверть. Пусть $h(t)$ — зависимость высоты уровня воды от времени в этом случае $h(0) = H/4$, где H — высота ванны. Введём новые переменные $h' = 4h$, $t' = 2t$. В новых переменных

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta h'}{\Delta t'} = -\dfrac{s}{S}\sqrt{2gh'}, \\ h'(0) = H; \end{cases}$$

то есть получилось точно такое же уравнение с таким же начальным условием, как и для полностью заполненной ванны. Значит, $h' = 0$ при $t' = \tau$, то есть при $t = \frac{\tau}{2}$. Получается, что последняя четверть объёма ванны опорожняется за время $\tau/2$, если камней в ванне нет. Первые три четверти опорожняются за время $\tau - \frac{\tau}{2} = \frac{\tau}{2}$. Так как времена опорожнения ванны без камней и ванны с камнями, согласно условию, отличаются в два раза, то из записанного уравнения следует, что сечение, «занятое» водой, в ванне с камнями, равно $S/2$. Поэтому время опорожнения последней четверти ванны, если она заполнена камнями, будет равно $\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{\tau}{4}$.

Время опорожнения ванны, заполненной камнями только на 25%, составит, следовательно: $\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{4} = \frac{3\tau}{4}$ (поскольку сначала площадь водного зеркала в ванне равна ш, а затем, когда уровень воды доходит до камней, площадь водного зеркала уменьшается в 2 раза).

Ответ: $3\tau/4$.

Критерии оценивания
Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что скорость уменьшения уровня воды пропорциональна квадратному корню из высоты уровня..1 балл
Доказано, что время опорожнения ванны, заполненной на четверть, в два раза меньше времени опорожнения полной ванны..2 балла
(если это утверждении присутствует в работе без строгого доказательства, за этот пункт ставится 1 балл, в дальнейшем баллы не снимаются!)
Найдено время опорожнения последней четверти ванны, заполненной галькой...............1 балл
Получен ответ ....1 балл