

Решение задач

Задача.1. После достаточно большого времени шарики, вследствие действия силы трения (4 балла), будут падать с одинаковой постоянной скоростью, причём тяжёлый будет находиться ниже. (4 балла) Второй закон Ньютона, записанный для каждого шарика в проекции на ось движения, даёт: $m_2g - T - F = 0$, $m_1g + T - F = 0$, где T – сила натяжения нити, F – сила сопротивления воздуха, действующая на каждый из шариков. (6 баллов)

Отсюда
$$T = (m_2 - m_1)g/2. \text{ (6 баллов)}$$

Задача.2. Пусть W_{k1}' и W_{k1}'' – кинетические энергии первого поршня до и после столкновения, а W_{k2}' и W_{k2}'' – кинетические энергии второго поршня до и после столкновения.

По условию задачи при движении поршней по трубе их потенциальная энергия не меняется, а трение отсутствует. Следовательно, количество тепла, выделившееся при их неупругом ударе, равно разности кинетических энергий поршней до и после столкновения:

$$Q = (W_{k1}'' + W_{k2}'') - (W_{k1}' + W_{k2}'). \text{ (3 балла)}$$

Поскольку диаметры поршней одинаковы и одинаковы величины давлений, сумма сил давления действующих на оба поршня равна нулю. (3 балла) Это означает, что суммарный импульс поршней не изменяется. (3 балла) Но начальный импульс был равен нулю, а после неупругого удара поршни должны двигаться с одной скоростью. Значит, после удара эта скорость равна нулю. Тогда, после удара:

$$W_{k1}'' + W_{k2}'' = 0 \text{ и } Q = W_{k1}' + W_{k2}'. \text{ (3 балла)}$$

Кинетическая энергия до поршней до столкновения изменялась за счёт совершения работы силами давления атмосферного воздуха $F = p_0S$.

К моменту столкновения эта работа достигла величины:

$$A = Fx_1 + Fx_2 = F(x_1 + x_2) = FL = p_0SL \text{ (4 балла)}$$

где x_1 и x_2 – расстояния от начальных положений поршней до точки удара.

Таким образом:
$$Q = Lp_0S. \text{ (4 балла)}$$

Задача.3. Дальность полёта тела, брошенного под углом к горизонту, максимальна при угле бросания 45° . (2 балла) Если нас интересует минимальная скорость, с которой должен прыгнуть кузнечик, то она должна быть направлена под углом 45° к горизонту. Из закона сохранения импульса легко найти, что при прыжке кузнечика соломинка приобретает скорость $u = \frac{m}{M} \frac{v}{\sqrt{2}}$. (3 балла)

Поэтому горизонтальная составляющая скорости кузнечика относительно соломинки равна $v' = \frac{v}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{m}{M}\right)$. (3 балла)

Время полёта кузнечика $t = \frac{v\sqrt{2}}{g}$. (4 балла)

За это время он пролетает расстояние L относительно соломинки.

Т.е. $\frac{v}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{v\sqrt{2}}{g} = L$. (4 балла)

Откуда $v = \sqrt{\frac{M}{M+m}} gL$. (4 балла)

Задача.4. Условие сдвига комода:

$$F = F_{\text{тр1}} + F_{\text{тр2}} = k_1 N_1 + k_2 N_2, \text{ (2 балла)}$$

где $F_{\text{тр1}}$ и N_1 – силы трения и реакции опоры, действующие на левую опору, а $F_{\text{тр2}}$ и N_2 – на правую.

Если комод не опрокидывается, выполняется равенство моментов сил относительно центра масс комода:

$$(F + k_1 N_1 + k_2 N_2) \frac{h}{2} = (N_2 - N_1) \frac{L}{2}, \text{ (8 баллов)}$$

а также равенство: $N_2 + N_1 = Mg$

Решая систему полученных уравнений получим:

$$F = \frac{k_2 + k_1}{2(L + (k_1 - k_2)h)} LMg \text{ (5 баллов)}$$

В записанных уравнениях предполагалось, что комод не опрокидывается. Возможные равенство F бесконечности и смена знака F в последнем уравнении, соответствуют нарушению этого условия. (5 баллов)

Задача.5. Пусть: U_0 – напряжение в сети трамвайной линии; I_1 и I_2 – силы тока, потребляемого двигателем трамвая на горизонтальном и наклонном участке при движении вверх; R – полное сопротивление цепи электродвигателя и контактных проводов; $P_{\text{тр}}$ и $P_{\text{т}}$ – модули мощностей сил трения и тяжести.

При движении трамвая по горизонтальному участку пути мощность тока, потребляемая от сети, равна $P = U_0 I_1$. (1 балл) Часть этой мощности теряется в виде джоулева тепла $I_1^2 R$, выделяющегося на полном сопротивлении R . Поэтому КПД двигателя:

$$\eta = \frac{U_0 I_1 - I_1^2 R}{U_0 I_1} = 1 - \frac{I_1 R}{U_0}. \quad (1) \text{ (2 балла)}$$

Согласно закону сохранения и превращения энергии, при движении трамвая с постоянной скоростью по горизонтальному участку пути полезная мощность $\eta U_0 I_1$ должна быть равна мощности силы трения $P_{\text{тр}}$:

$$\eta U_0 I_1 = P_{\text{тр}}. \quad (2) \text{ (2 балла)}$$

При движении трамвая вниз по наклонному участку пути с той же постоянной скоростью с выключенным двигателем абсолютное значение мощности сил трения должно быть равно мощности силы тяжести:

$$P_{\text{тр}} = P_{\text{т}}, \quad (3), \text{ (2 балла)}$$

а при движении по этому же наклонному участку пути вверх мощность, потребляемая из сети, будет расходоваться на джоулево тепло и на совершение работы против сил трения и тяжести:

$$U_0 I_2 = I_2^2 R + P_{\text{тр}} + P_{\text{т}} = I_2^2 R + 2\eta U_0 I_1, \quad (2 \text{ балла})$$

$$I_2^2 \frac{R}{U_0} - I_2 + 2\eta I_1 = 0.$$

Здесь важно, что изменение знака работы силы тяжести привело к изменению процессов внутри электрической системы. В ней потёк больший ток, как следствие потребовалось ещё большая его мощность, чтобы скомпенсировать так же и рост потерь.

Из равенств (2) и (3) получим: $P_{\text{т}} = \eta U_0 I_1$.

Из выражения (1) найдём отношение $\frac{R}{U_0} = \frac{1-\eta}{I_1}$, и подставим его в последнее квадратное уравнение:

$$I_2^2 (1-\eta) - I_1 I_2 + 2\eta I_1^2 = 0. \quad (2 \text{ балла})$$

Решая это уравнение относительно искомой силы тока I_2 , получим:

$$I_2 = I_1 \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8\eta(1-\eta)}}{2(1-\eta)}. \quad (1 \text{ балл})$$

В этом выражении два «сюрприза»: во-первых – возможно два знака перед знаком радикала, во-вторых выражение под корнем больше нуля только при $\eta > 0,85$ и $\eta < 0,15$. **(3 балла)**

Ограничения на КПД, обусловлены условием задачи: упомянутые в условии равенства невозможны при других значениях КПД. Знак «-» перед корнем означает, что $I_2 < I_1$. Такая «экономия» может возникнуть, если при движении по прямой потери на джоулево тепло превосходили потери на трение. **(2 балла)** В реальном устройстве это трудно себе представить, так же, как и КПД электродвигателя меньше 15%.

В итоге получаем ответ:

$$I_2 = I_1 \frac{1 + \sqrt{1 - 8\eta(1-\eta)}}{2(1-\eta)}; \quad \text{при } \eta > 0,85. \quad (3 \text{ балла})$$