

**Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета
по предмету «Физика»
Очный тур
2015-2016 учебный год**

11 класс

Возможные решения

Задача 1. (20 баллов)

Вдоль одной прямой удерживаются три положительных электрических заряда, два из которых скреплены между собой невесомой нитью длины L (рис. 10). Величины зарядов, их массы и расстояния между ними указаны на рисунке. Систему отпускают. С какими ускорениями начнут разлетаться заряды? Какие скорости они приобретут после разлёта на большое расстояние? Нить считать непроводящей и нерастяжимой.

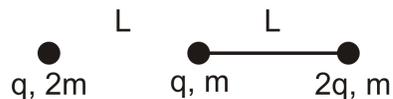


Рис. 10.

Ответ: $a = \frac{3kq^2}{4mL^2}$, $v = \sqrt{\frac{kq^2}{mL}}$.

Решение: Пронумеруем заряды так, как показано на рис. 11. Так как второй и третий заряды соединены нитью, их ускорения могут быть направлены только в одну сторону, а поскольку все заряды одноимённые, то под действием электрических сил они будут разлетаться в разные стороны. Пусть первый заряд начинает двигаться с ускорением a_1 , направленным влево, а второй и третий заряды с ускорениями a_2 и a_3 , направленными, соответственно, вправо. Запишем 2-й закон Ньютона для каждого заряда (T — сила натяжения нити, постоянная k в системе СИ равна $1/(4\pi\epsilon_0)$):

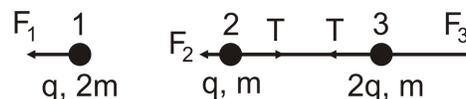


Рис. 11.

$$2ma_1 = F_1 = \frac{kq^2}{L^2} + \frac{2kq^2}{(2L)^2} = \frac{3kq^2}{2L^2},$$

$$ma_2 = T - F_2 = T + \frac{kq^2}{L^2} - \frac{2kq^2}{L^2} = T - \frac{kq^2}{L^2},$$

$$ma_3 = F_3 - T = -T + \frac{2kq^2}{L^2} + \frac{2kq^2}{(2L)^2} = \frac{5kq^2}{2L^2} - T.$$

Из первого равенства следует, что

$$a_1 = \frac{3kq^2}{4L^2}.$$

Проанализируем два оставшихся равенства. Так как a_2 неотрицательно, то $T > 0$, т.е. нить является натянутой. Следовательно, ускорения второго и третьего заряда в начальный момент равны $a_2 = a_3$. Отсюда, складывая оставшиеся равенства, получаем, что

$$2ma_2 = \frac{3kq^2}{2L^2} \Rightarrow a_2 = a_3 = \frac{3kq^2}{4L^2}.$$

Заметим, что в дальнейшем действие первого заряда ослабевает, поэтому нить во время всего движения зарядов остаётся натянутой из-за взаимного отталкивания второго и третьего заряда. Это значит, что в любой момент времени их скорости и ускорения совпадают.

Для нахождения скоростей зарядов на бесконечности, запишем выражения для потенциально и кинетической энергии системы из трёх зарядов в начальный момент:

$$E_{к1} = 0, \quad E_{п1} = \frac{kq^2}{L} + \frac{2kq^2}{L} + \frac{2kq^2}{2L} = \frac{4kq^2}{L}$$

и на бесконечности:

$$E_{к2} = \frac{2mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_3^2}{2} = \frac{2mv_1^2}{2} + 2\frac{mv_2^2}{2}, \quad E_{п2} = \frac{2kq^2}{L}.$$

Потенциальная энергия $E_{п2}$ не равна нулю, так как второй и третий заряды всегда находятся на расстоянии L . По закону сохранения энергии, получаем

$$\frac{2mv_1^2}{2} + 2\frac{mv_2^2}{2} + \frac{2kq^2}{L} = \frac{4kq^2}{L} \Rightarrow v_1^2 + v_2^2 = \frac{2kq^2}{mL}.$$

С другой стороны, по закону сохранения импульса:

$$0 = -2mv_1 + mv_2 + mv_3 \Rightarrow 0 = -2mv_1 + 2mv_2 \Rightarrow v_2 = v_1.$$

Отсюда получаем, что

$$v_1 = v_2 = v_3 = \sqrt{\frac{kq^2}{mL}}.$$

Критерии:

Найдены электрические силы, действующие на заряды	3 балла
Записан 2-й закон Ньютона для каждого заряда	3 балла
Показано, что $a_2 = a_3$	1 балл
Найдены a_1 и a_2	2 балла
Показано, что $v_2 = v_3$	1 балл
Записаны выражения для потенциальной и кинетической энергии	4 балла
Закон сохранения энергии	2 балла
Закон сохранения импульса	2 балла
Найдено значение скоростей	2 балла

Задача 2. (20 баллов)

На рис. 12 представлена цепь, состоящая из двух конденсаторов ёмкостью C и $2C$, идеального источника с ЭДС \mathcal{E} , резистора и ключа. Какой заряд q протечёт через гальванометр Γ после замыкания ключа? Какое количество теплоты выделится при этом на сопротивлении?

Ответ: $q_{\Gamma} = 2C\mathcal{E}$, $Q = 2C\mathcal{E}^2/3$.

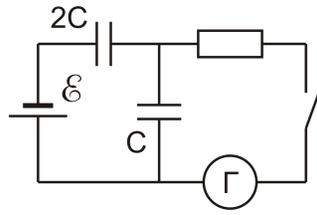


Рис. 12.

Решение: Рассмотрим случай, когда ключ разомкнут. В этом случае конденсаторы соединены последовательно, и их общая ёмкость равна $C_{\text{общ}} = C_1 C_2 / (C_1 + C_2) = 2C/3$, где $C_1 = C$, $C_2 = 2C$. Заряд на каждом конденсаторе составляет

$$q_1 = q_2 = C_{\text{общ}} \mathcal{E} = \frac{2C\mathcal{E}}{3}.$$

Если ключ замкнут, то в стационарном состоянии (когда токи в цепи не текут) напряжение на конденсаторе ёмкостью C равно нулю. Соответственно, заряд на нём $q'_1 = 0$. Напряжение на оставшемся конденсаторе равно \mathcal{E} , следовательно, $q'_2 = 2C\mathcal{E}$.

Отсюда получаем, что на правую обкладку второго конденсатора добавился заряд $\Delta q_2 = q'_2 - q_2 = 4C\mathcal{E}/3$, в то время как на верхнюю обкладку первого конденсатора — заряд $\Delta q_1 = q_1 = 2C\mathcal{E}/3$ (см. рис. 13). Следовательно, за время, прошедшее после замыкания ключа, в цепи гальванометра протёк заряд

$$q_{\Gamma} = \Delta q_1 + \Delta q_2 = q'_2 - q_2 + q_1 = 2C\mathcal{E}.$$

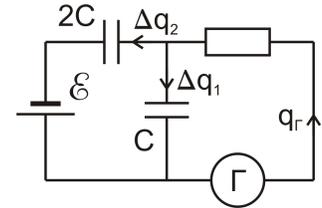


Рис. 13.

В то же время, через источник прошёл заряд Δq_2 , поэтому работа источника по перемещению заряда равна

$$A_{\text{ист}} = \Delta q_2 \mathcal{E} = \frac{4C\mathcal{E}^2}{3}.$$

Работа источника тратится на изменение энергии конденсаторов и теплоту, выделяющуюся на резисторе:

$$A_{\text{ист}} = \Delta E_{\text{конд}} + Q.$$

Начальная энергия конденсаторов равна

$$E_{\text{конд}} = \frac{C_{\text{общ}} \mathcal{E}^2}{2} = \frac{C\mathcal{E}^2}{3},$$

конечная — $E'_{\text{конд}} = 2C\mathcal{E}^2/2 = C\mathcal{E}^2$. Отсюда получаем, что

$$\frac{4C\mathcal{E}^2}{3} = C\mathcal{E}^2 - \frac{C\mathcal{E}^2}{3} + Q \Rightarrow Q = \frac{2C\mathcal{E}^2}{3}.$$

Критерии:

- Найдены заряды на обоих конденсаторах до замыкания ключа 2 балла
- Найдены заряды на обоих конденсаторах после замыкания ключа 3 балла
- Найден заряд, прошедший через гальванометр 3 балла
- Записаны выражения для энергии конденсаторов 4 балла

Найдено изменение энергии конденсатора	3 балла
Найдена работа источника	3 балла
Найдена выделившаяся теплота	2 балла

Задача 3. (20 баллов)

Длинная нить переброшена через два маленьких невесомых блока, оси которых жёстко закреплены. К концам нити привязаны одинаковые грузы массой m (см. рис. 14). К середине нити прикрепили ещё один груз массой m и без толчка отпустили. Найти максимальную скорость центрального груза. Расстояние между блоками равно $2L$. Сопротивлением воздуха и трением пренебречь.

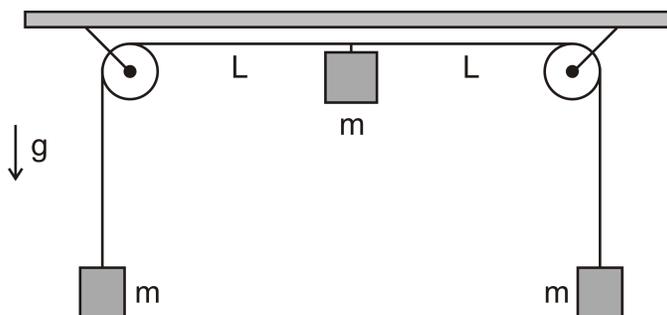


Рис. 14.

Ответ: $v_{\max} = \sqrt{\frac{2gL}{3}} \cdot (\sqrt{3} - 1)$.

Решение: Скорость центрального груза становится максимальной, когда его ускорение обращается в нуль. Поскольку движения всех грузов в системе связаны друг с другом, ускорения крайних грузов в этот момент также будут равны нулю. Таким образом, искомое положение есть положение равновесия системы (рис. 15).

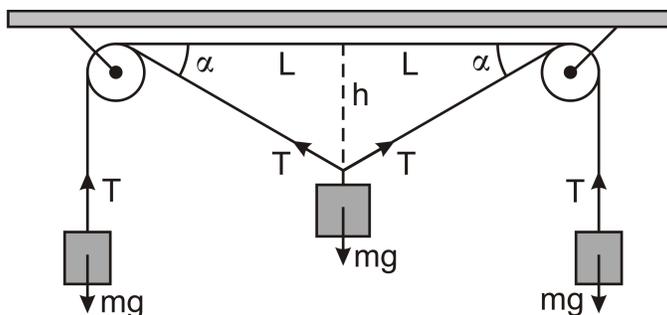


Рис. 15.

Пусть T — сила натяжения нити. Из условия равновесия следует, что

$$mg = T, \quad mg = 2T \sin \alpha \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

Отсюда находим, что для достижения этого положения центральный груз должен опуститься от начального положения на

$$h = L \operatorname{tg} \alpha = \frac{L}{\sqrt{3}},$$

в то время как крайние грузы должны подняться на

$$H = \frac{L}{\cos \alpha} - L = \frac{(2 - \sqrt{3})L}{\sqrt{3}}.$$

Пусть в этот момент скорость центрального груза равна v_{\max} . Скорость крайнего груза равна проекции скорости центрального на направление нити, т.е. $v_{\max} \sin \alpha = v_{\max}/2$. По закону сохранения энергии

$$0 = 2 \frac{m(v_{\max}/2)^2}{2} + \frac{mv_{\max}^2}{2} + 2mgH - mgh = \frac{3mv_{\max}^2}{4} - mgL(2 - \sqrt{3}).$$

Отсюда находим, что

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{4gL}{3}(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{\frac{2gL}{3}(\sqrt{3} - 1)}.$$

Критерии:

Указано, что макс. скорость соответствует положению равновесия	2 балла
Нахождение положения равновесия	4 балла
Закон сохранения энергии	6 баллов
Связь между скоростями грузов	4 балла
Нахождение максимальной скорости среднего груза	4 балла

Задача 4. (20 баллов)

Из ионной пушки А, находящейся на расстоянии $h = 4$ см от круглого экрана Э радиуса $r = 2$ см, со скоростью v вылетают заряженные частицы (ионы) и попадают точно в его центр (рис. 16). Между пушкой и экраном создают однородное электрическое поле, направленное вдоль поверхности экрана. Если значение напряжённости поля превышает величину $E_0 = 10$ В/м, ионы на экран не попадают. Затем электрическое поле меняют на направленное таким же образом магнитное. В этом случае частицы перестают попадать на экран при значении индукции $B_0 = 8$ мТл. Найти скорость v .

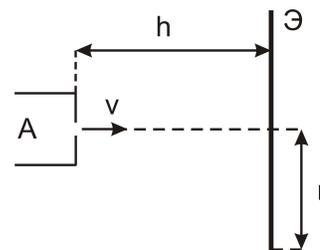


Рис. 16.

Ответ: $v = 1$ км/с.

Решение: Рассмотрим первую ситуацию, когда вдоль поверхности экрана приложено однородное электрическое поле E_0 . В этом случае проекция скорости иона на ось, перпендикулярную экрану, остаётся постоянной и равной начальной скорости v . Проекция скорости на ось, направленную параллельно вектору напряжённости электрического поля, меняется со временем линейно. Пусть заряженная частица достигает экрана за время t . Тогда

$$h = vt, \quad r = \frac{qE_0 t^2}{2m},$$

где q — абсолютная величина заряда, а m — масса иона. Отсюда, выразив t , найдём, что

$$\frac{q}{m} = \frac{2r v^2}{E_0 h^2}.$$

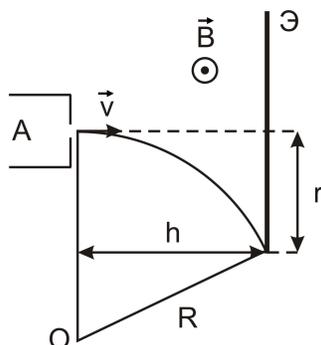


Рис. 17.

Во втором случае ион под действием однородного магнитного поля B_0 движется с постоянной по модулю скоростью вдоль дуги окружности с центром в точке O (см. рис. 17; для определённости заряд иона взят положительным). Радиус этой окружности можно найти, приравняв центростремительное ускорение отношению величины силы Лоренца к массе иона

$$a_{ц.с.} = \frac{F_{л}}{m} \Rightarrow \frac{v^2}{R} = \frac{q v B_0}{m} \Rightarrow R = \frac{m v}{q B_0}.$$

С другой стороны, по теореме Пифагора

$$(R - r)^2 + h^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - 2Rr + r^2 + h^2 = R^2 \Rightarrow R = \frac{r^2 + h^2}{2r}.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{m v}{q B_0} = \frac{r^2 + h^2}{2r} \Rightarrow \frac{q}{m} = \frac{2r v}{B_0(r^2 + h^2)}.$$

Наконец, приравнявая правые части найденных уравнений, находим выражение для скорости v :

$$\frac{2r v^2}{E_0 h^2} = \frac{2r v}{B_0(r^2 + h^2)} \Rightarrow v = \frac{E_0 h^2}{B_0(r^2 + h^2)} = 1000 \frac{м}{с}.$$

Критерии:

Формула $h = vt$	2 балла
Формула $r = qE_0 t^2 / (2m)$	4 балла
Найден радиус траектории в магн. поле	3 балла
Теорема Пифагора для параметров траектории	4 балла
Выражен радиус траектории через параметры установки	2 балла
Получено выражение для скорости иона	3 балла
Найдено числовое значение скорости	2 балла

Задача 5. (20 баллов)

В открытый контейнер объёмом 0,25 л поместили 2,1 г полония $^{210}_{84}\text{Po}$ и герметично закрыли. Данный изотоп полония α -радиоактивен с периодом полураспада $T = 140$ дней

и превращается в стабильный изотоп свинца $^{206}_{82}\text{Pb}$. Найти давление внутри контейнера через 10 недель. С помощью теплоотводящей установки температура внутри контейнера поддерживается равной 27°C . Атмосферное давление равно 100 кПа. Универсальная газовая постоянная равна $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

Ответ: 130 кПа.

Решение: Пусть V — объём сосуда, $T_0 = 300 \text{ К}$ — температура в нём. Полоний и свинец не являются газами (это металлы с достаточно большой плотностью), поэтому их объёмом по сравнению с объёмом сосуда можно пренебречь. В результате α -распада в сосуде появляется некоторое количество гелия, который и создаёт дополнительное давление. Найдём это количество.

Количество вещества, соответствующее 2,1 г полония $^{210}_{84}\text{Po}$ равно

$$\nu_{\text{Po}} = \frac{2,1 \text{ г}}{210 \text{ г/моль}} = 0,01 \text{ моль.}$$

За время $t = 70$ дней распадается на свинец и гелий $\nu_{\text{Po}}(1 - 2^{-t/T})$ моль полония. Таким образом, за $t = 70$ дней в сосуде окажется

$$\nu_{\text{He}} = \nu_{\text{Po}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

моль гелия.

Парциальное давление гелия равно

$$p_{\text{He}} = \frac{\nu_{\text{He}}RT_0}{V} = \frac{\nu_{\text{Po}}RT_0}{V} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 30 \text{ кПа.}$$

Отсюда находим полное давление в сосуде как сумму парциальных давлений гелия и воздуха:

$$p = p_{\text{атм}} + p_{\text{He}} = 130 \text{ кПа.}$$

Критерии:

Найдено количество полония	3 балла
Найдено количество выделившегося гелия	7 баллов
Уравнение Менделеева-Клапейрона для гелия	5 баллов
Найдено общее давление в сосуде	5 баллов

Максимально возможный балл в 11 классе 100