Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета по предмету «Физика»

2013-2014 учебный год

9 класс

РЕШЕНИЯ

Задача 1

Покажем, что ось цилиндра движется относительно земли со скоростью $v/2$. В самом деле, цилиндр не скользит по земле, а доска не скользит по цилиндру. Следовательно, к тому моменту, когда конец доски, который держит рабочий, окажется над осью цилиндра, цилиндр сместится на расстояние l по земле, а рабочий, соответственно, пройдет по земле расстояние $2l$, а значит, его скорость относительно земли в два раза больше, чем скорость оси цилиндра.

Тогда скорость оси цилиндра относительно доски также равна $v/2$. Общий путь в системе отсчета доски, который пройдут мышь и ось цилиндра до момента «встречи», равен, очевидно, $2l$, так что на искомое время t запишем уравнение:

$$ut + \frac{v}{2}t = 2l\,, \tag{1}$$

откуда получим $t = \dfrac{2l}{u + v/2} = 2$ с.

Задача 2

Вычислим следующие четыре количества тепла:

$Q_1 = c_1 m_1 \left(t_0 - t_1\right)$ – поглощается при нагревании медного калориметра до $t_0 = 0\,°\text{C}$;

$Q_2 = c_2 m_2 \left(t_2 - t_0\right)$ – выделяется при остывании воды до $t_0 = 0\,°\text{C}$;

$Q_3 = \lambda m_3$ – поглощается при таянии льда;

$Q_4 = \lambda m_2$ – выделяется при замерзании воды.

В зависимости от соотношений между этими величинами, рассмотрим разные случаи.

Если $Q_1 = Q_2$, то тепловое равновесие установится, очевидно, при 0 °С.

Если $Q_1 > Q_2$, то тепла, выделившегося при остывании воды до 0 °С, недостаточно, чтобы нагреть до этой температуры калориметр. Если $Q_1 < Q_2 + Q_4$, то к моменту достижения калориметром этой температуры замерзнет только часть воды, и температура теплового равновесия составит 0 °С. Если $Q_1 \ge Q_2 + Q_4$ (для краткости включим сюда случай равенства), то замерзнет вся вода, и далее лед массой $m_2 + m_3$ начнет остывать до достижения теплового равновесия, температуру t которого найдем из уравнения теплового баланса

$$c_1 m_1 \left(t - t_1\right) = Q_2 + Q_4 + c_3\left(m_2 + m_3\right)\left(t_0 - t\right), \tag{1}$$

$$t = \frac{Q_2 + Q_4 + c_3\left(m_2 + m_3\right)t_0 + c_1 m_1 t_1}{c_1 m_1 + c_3\left(m_2 + m_3\right)}\,. \tag{2}$$

Если $Q_2 > Q_1$, то тепло, поглотившееся при нагревании калориметра до 0 °С, меньше, чем тепло, которое могло бы выделиться при остывании воды до этой температуры. Если $Q_2 < Q_1 + Q_3$, то к моменту достижения водой этой температуры растает только часть льда, и температура теплового равновесия составит 0 °С. Если $Q_2 \ge Q_1 + Q_3$ (вновь для краткости включим сюда случай равенства), то растает весь лед, и далее калориметр и образовавшаяся вода массы m_3 температурой 0 °С начнут нагреваться до достижения теплового равновесия, температуру t которого найдем из уравнения теплового баланса

$$c_2 m_2 (t_2 - t) = Q_1 + Q_3 + c_1 m_1 (t - t_0) + c_2 m_3 (t - t_0), \tag{3}$$

$$t = \frac{c_2 m_2 t_2 - Q_1 - Q_3 + c_1 m_1 t_0 + c_2 m_3 t_0}{c_1 m_1 + c_2 (m_2 + m_3)}. \tag{4}$$

Задача 3

Скорость шарика на вершине клина на высоте H равна

$$u = \sqrt{v^2 - 2gH} \tag{1}$$

(это легко установить, например, из закона сохранения механической энергии).

На вершине клина шарик имеет горизонтальную и вертикальную составляющие скорости, равные $u/\sqrt{2}$. Расположим начало координат в точке отрыва шарика от клина, вертикальную ось y направим вверх. Отсчитывая время от момента отрыва шарика от клина, для координаты y шарика можно записать закон равноускоренного движения:

$$y = \frac{u}{\sqrt{2}} t - \frac{gt^2}{2}. \tag{2}$$

Обозначим τ – время падения шарика на землю. В этот момент координата y равна $-H$. Подставив в (2), получим:

$$-H = \frac{u}{\sqrt{2}} \tau - \frac{g\tau^2}{2}. \tag{3}$$

Решая квадратное уравнение (3) и выбирая положительное решение, получим

$$\tau = \frac{1}{g}\left(\frac{u}{\sqrt{2}} + \sqrt{u^2/2 + 2gH} \right). \tag{4}$$

Расстояние от подножия клина до места падения шарика на землю равно $u\tau/\sqrt{2}$ (в горизонтальном направлении шарик движется равномерно). Используя (4) и (1), получим искомое расстояние от места выстрела до места падения шарика на землю:

$$L = H + u\tau/\sqrt{2} = \frac{v^2}{2g} + \frac{1}{2g}\sqrt{v^4 - 4g^2H^2}. \tag{5}$$

Как видно из (5), наибольшее расстояние L получается при нулевой высоте клина (то есть фактически при его отсутствии), при этом $L = v^2/g = 10$ м.

Задача 4

Отсутствие реакции блока на потолок означает, что натяжение нити равно нулю. Следовательно, груз движется только под действием силы тяжести и падает вниз с ускорением g. Поскольку нить нерастяжима, ее натяжение может быть равно нулю, только если второй ее конец, прикрепленный к лестнице, движется вверх с ускорением a, по величине не меньшим g. Запишем для лестницы второй закон Ньютона в проекции на ось, направленную вертикально вверх:

$$F - Mg = Ma, \tag{1}$$

где F – модуль силы, с которой человек действует на лестницу. Поскольку, как мы установили, $a \geq g$, то выполняется неравенство

$$F \geq 2Mg. \tag{2}$$

С учетом третьего закона Ньютона запишем для человека второй закон Ньютона в проекции на ось, направленную вертикально вниз:

$$mg + F = ma', \tag{3}$$

где a' – ускорение человека. Выражая отсюда a', найдем модуль ускорения человека относительно лестницы

$$a + a' = F\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right). \tag{4}$$

Учитывая неравенство (2), получим

$$a + a' \geq 2g\left(1 + \frac{M}{m}\right). \tag{5}$$

Следовательно, через время t после начала движения скорость человека относительно лестницы будет направлена вертикально вниз, а ее величина будет удовлетворять неравенству

$$v \geq 2g\left(1 + \frac{M}{m}\right)t = 2,4\ \text{м/с}. \tag{6}$$

Задача 5

Проведем измерения силы тока для следующих электрических цепей:
(а) батарейка и амперметр подключены последовательно;
(б) батарейка, амперметр и резистор подключены последовательно;
(в) батарейка, амперметр и резистор подключены параллельно.

Показания амперметра в этих трех цепях обозначим соответственно I_1, I_2 и I_3. Запишем закон Ома для цепи (а):

$$\varepsilon = I_1\left(r + r_A\right). \tag{1}$$

Запишем закон Ома для цепи (б):

$$\varepsilon = I_2\left(r + r_A + R\right). \tag{2}$$

Рассмотрим теперь цепь (в). Обозначим I_ε – сила тока, протекающего через батарейку, I_R – сила тока, протекающего через резистор, причем выберем знаки токов так, что выполняется

$$I_\varepsilon = I_3 + I_R. \tag{3}$$

Запишем закон Ома для цепи (в):

$$\varepsilon - I_\varepsilon r = I_3 r_A = I_R R. \tag{4}$$

Исключая из системы уравнений (3) и (4) токи I_ε и I_R, получим

$$\varepsilon = I_3\left(r + r_A + \frac{r r_A}{R}\right). \tag{5}$$

Исключая из системы уравнений (1), (2) и (5) сопротивления r_A и R, получим квадратное уравнение на искомое сопротивление r:

$$r^2 - \frac{\varepsilon}{I_1}r + \left(\frac{\varepsilon}{I_3} - \frac{\varepsilon}{I_1}\right)\left(\frac{\varepsilon}{I_2} - \frac{\varepsilon}{I_1}\right) = 0. \tag{6}$$

Из двух решений уравнения (6), в силу условия $r_A < r$, выбираем большее:

$$r = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{I_1} + \sqrt{\frac{1}{I_1^2} - 4\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right)\left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right)}\right). \tag{7}$$