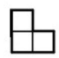
Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2021–22 учебный год
7 класс

Задание 1. На острове рыцарей и лжецов живет 2022 человека, каждый из которых является либо рыцарем (который всегда говорит правду), либо лжецом (который всегда лжет). Однажды каждый из них сказал: «Среди остальных 2021 жителя острова есть по меньшей мере один лжец». Сколько рыцарей живет на острове? Обоснуйте свой ответ. (20 баллов)

Задание 2. Из клетчатого квадрата 6×6 нужно вырезать по линиям сетки квадратик меньшего размера так, чтобы оставшуюся часть можно было разбить на уголки из трех клеток  без пропусков и наложений. Уголки можно поворачивать и переворачивать. Чему могут равняться размеры вырезанного квадратика? Укажите все возможные ответы и объясните, почему других нет. (20 баллов)

Задание 3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) проведена биссектриса BD. Точка E, лежащая внутри отрезка AB, такова, что $CE = BE$. Отрезки BD и CE пересекаются в точке F. Оказалось, что $DF = CF$. Найдите углы треугольника ABC. Обоснуйте свой ответ. (20 баллов)

Задание 4. Даны действительные числа a, b, c. Известно, что числа $a+b$, $b+c$, $c+a$ — это три последовательные целые числа, записанные в каком-то порядке (необязательно по возрастанию), причем наибольшее из них нечетно. Докажите, что числа a, b, c также являются тремя последовательными целыми числами, записанными в каком-то порядке. (20 баллов)

Задание 5. Восемь шахматистов играют однокруговой турнир (всего играется семь туров, в каждом туре шахматисты разбиваются на четыре пары и в каждой паре играют друг с другом. В итоге каждый играет с каждым ровно по одному разу). За победу дается 1 очко, за ничью — 1/2 очка, за поражение — 0 очков. Через какое наименьшее количество туров может оказаться так, что единоличный победитель турнира уже выявился досрочно? Обоснуйте свой ответ. (20 баллов)