

Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2021-22 учебный год

11 класс

Задание 1. Пусть p — нечётное простое число. Найдите все целые x и y такие, что $x^3 + y^3 + p^3 = x^2y + xy^2$.
(25 баллов.)

Задание 2. Функция f для всех действительных x, y удовлетворяет неравенствам $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ и $f(x) \geq x$. Найдите все такие функции $f(x)$.
(25 баллов.)

Задание 3. Сумма нескольких натуральных чисел, в записи каждого из которых участвуют только цифры 3 и 0, равна $777 \dots 77$ (2022 семёрки). Какое наименьшее число слагаемых может быть в этой сумме?
(25 баллов.)

Задание 4. В неравностороннем треугольнике ABC провели высоту BH , медиану BM и биссектрису BL . Точки P и Q — ортогональные проекции вершин A и C на прямую BL . Докажите, что точки M, H, P и Q лежат на одной окружности.
(25 баллов.)