Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2021-22 учебный год

9 класс

Задание 1. Алиса купила открытку в книжном магазине, потратив менее 100 рублей. Цена открытки — целое число рублей. Через месяц она вернулась в магазин, чтобы купить такую же открытку, и обнаружила, что она подорожала в 1,2 раза, при этом продавец лишь переставил цифры на ценнике. Сколько стоила открытка первоначально?

(25 *баллов.*)

Ответ: 45 *рублей.*

Решение. Пусть Алиса в первый раз заплатила $10x+y$ рублей, а во второй — $10y+x$ рублей, тогда $10y + x = 1,2(10x + y)$. Отсюда $5x = 4y$, и значит, цифра y делится на 5, то есть $y = 5$, $x = 4$. Итак, открытка стоила 45 рублей.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Только проверка, что условие выполняется, если открытка стоит 45 рублей — 5 баллов. Получено только равенство $5x = 4y$ (без дальнейшего продвижения) — 10 баллов. Указано, что единственным решением уравнения $5x = 4y$ будет только $x = 4$, $y = 5$ без обоснования этого утверждения — снимаются 2 балла.

Задание 2. Найдите целую часть числа

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023}\,.$$

(25 *баллов.*)

Ответ: 0.

Решение. Запишем для суммы S два равенства

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + + \left(\frac{1}{2021} - \frac{1}{2022}\right) + \frac{1}{2023}\,,$$
$$S = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}\right).$$

Все разности в скобках положительны, поэтому из первого равенства следует, что $S > 0$, а из второго $S < 1$. Поскольку $0 < S < 1$, целая часть S равна нулю.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказательство только одной из двух оценок $S > 0$ и $S < 1$ — 10 баллов.

Задание 3. В каждую клетку таблицы 21×22 вписано число 1 или -1. Под каждым столбцом записано произведение всех чисел столбца, а рядом с каждой строкой — произведение чисел строки. Какое наименьшее неотрицательное значение может принимать сумма всех этих произведений?

(25 *баллов.*)

Ответ: 3.

Решение. Сначала рассмотрим «крайнюю» ситуацию. Если во всех клетках таблицы числа равны $+1$, то и все произведения равны $+1$, а их общая сумма равна $21 + 22 = 43$.

Если мы сменим знак в одной из клеток, то изменится знак в произведении чисел одной строки и одного столбца. Значит, сумма всех произведений изменится на величину $\pm 2 \pm 2$, то есть это изменение может равняться 4, 0 или -4. Таким образом, после замены знаков в нескольких клетках таблицы значение суммы может измениться лишь на слагаемое, кратное 4.

Взяв за основу таблицу, заполненную числами $+1$, и меняя знаки в соответствующих клетках (чтобы придти к исходной таблице), мы получим значение суммы $43-4k$. Наименьшее неотрицательное значение выражения $43-4k$, очевидно, равно 3, и оно достигается при целом $k=10$.

Осталось привести пример таблицы, для которой указанное значение суммы произведений равно 3. Расставим сначала во всех клетках таблицы 21×22 числа $+1$, а затем заменим знак $+$ на $-$ у 10 чисел, стоящих, например, на диагонали, идущей из левого верхнего угла в нижний. Для полученной таблицы сумма всех произведений равна $43 - 10 \cdot 4 = 3$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Пример таблицы, для которой сумма произведений равна 3 — 10 баллов. Доказано, что каждая операция смены знака у одного из чисел не меняет чётности суммы — 4 балла. Доказано, что каждая операция смены знака не меняет остатка при делении суммы на 4 — 10 баллов. (Не суммируется с предыдущим критерием.) Доказано, что неотрицательное значение суммы произведений не меньше, чем 3 — 15 баллов.

Задание 4. В треугольнике ABC стороны AB и AC равны, и биссектриса угла B пересекает AC в точке E такой, что $BC = BE + EA$. Найдите угол A.

(25 *баллов.*)

Ответ: $\angle A = 100°$.

Первое решение. (Рис. 1.) На стороне BC отложим отрезок $BD = BE$. Тогда из условия получаем $CD = AE$, и по свойству биссектрисы

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC} = \frac{CD}{EC}\,.$$

Отсюда следует, что треугольники BAC и CDE подобны, поскольку у них общий угол C и одинаковое отношение заключающих этот угол сторон. Поэтому $CD = DE$ и $\angle DEC = \angle DCE$. Внешний угол BDE треугольника CDE равен сумме двух несмежных с ним углов, то есть $\angle BDE = 2\angle DCE = 2\angle ABC = 4\angle EBD$. В равнобедренном треугольнике BDE углы BDE и BED равны, поэтому $180° = \angle BDE + \angle BED + \angle EBD = 9\angle EBD$, то есть $\angle EBD = 20°$, $\angle ABC = \angle BCA = 40°$ и $\angle BAC = 100°$.

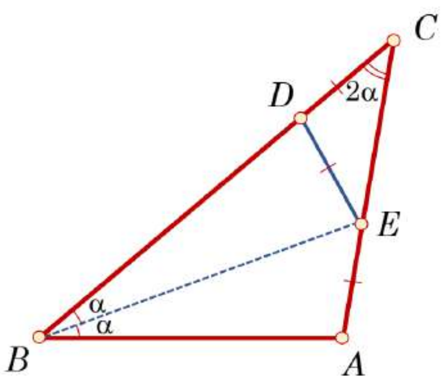

Рис. 1

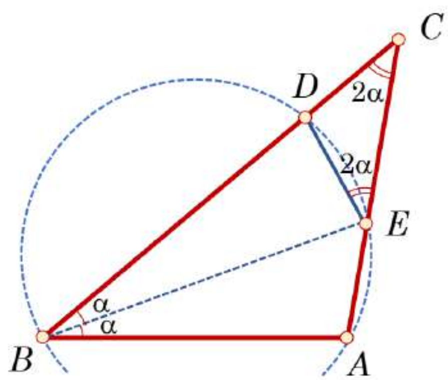

Рис. 2

Второе решение. (Рис. 2.) Рассмотрим описанную окружность треугольника ABE, и пусть D — точка пересечения этой окружности с прямой BC. Четырёхугольник $BAED$ — вписанный, поэтому $\angle B + \angle E = 180°$, и значит, $\angle DEC = 180° - \angle E = \angle B$. Поскольку $\angle C = \angle B = \angle DEC$, треугольник DEC — равнобедренный, и $DE = DC$.

Из равенства вписанных углов DBE и ABE следует равенство соответствующих дуг окружности, поэтому $DE = AE$. По условию $BC = BE + AE$, поэтому $BD + DC = BE + AE$, и так как $DC = AE$, отсюда получаем $BD = BE$. Таким образом, треугольник BDE — равнобедренный, и $\angle BDE = \angle BED$.

Пусть $\angle DBE = \alpha$, тогда $\angle DCE = \angle DEC = 2\alpha$, $\angle BED = \angle BDE = \angle DCE + \angle DEC = 4\alpha$. Сумма углов треугольника BDE равна $180^\circ = \alpha + 4\alpha + 4\alpha = 9\alpha$, то есть $\alpha = 20^\circ$, $\angle ABC = \angle BCA = 40^\circ$ и $\angle BAC = 100^\circ$.

Критерии. Дополнительное построение, связанное с равнобедренным треугольником BDE (или с описанной окружностью треугольника ABE) — 5 баллов. Правильно найден угол EBD — 15 баллов. Критерии не суммируются.