Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2021–22 учебный год
5 класс
Решения задач и критерии оценивания

Задание 1. Антошка выкопал на огороде пять картошек. Все они весят по-разному. Могло ли оказаться так, что он сможет разделить все картошки как на две кучки одинакового веса, так и на три кучки одинакового веса? Кучка может состоять и из одной картошки. Обоснуйте свой ответ. (20 баллов)

Решение. Да. В качестве искомого годится набор картошек весами 1, 2, 4, 5 и 6. Его можно разбить как $(4+5) = (1+2+6)$, так и $(1+5) = (2+4) = 6$.

Критерии. Любой верный пример — 20 баллов.

Задание 2. К натуральному числу n в конце приписали одну цифру. В результате получилось число, в 13 раз большее числа n. Чему могло равняться n? Укажите все ответы и объясните, почему других нет. (20 баллов)

Ответ. 1, 2, 3.

Решение. Если в конце числа n приписать цифру a, то получится число $10n+a$. Получаем уравнение $10n + a = 13n$, откуда $a = 3n$. Следовательно, a кратно 3. Цифры, кратные 3 — это 0, 3, 6, 9. Если $a = 0$, то $n = 0$, что противоречит условию, что n — натуральное. В остальных случаях получаем три ответа.

Критерии. Только один верный ответ — 1 балл.

Только два верных ответа — 2 балла.

Только три верных ответа — 3 балла.

Наличие каждого неверного ответа (в том числе $n = 0$) снижает оценку по предыдущим критериям на 1 балл, но не ниже нуля.

Решение перебором, но перебор неполный — не выше 10 баллов.

В полностью верном решении не исключен случай $n = 0$ — 15 баллов.

Задание 3. У Андрея, Лейсан и Тимура есть 12 больших чупа-чупсов разных цветов: несколько желтых, несколько зеленых и несколько красных. Они разложили чупа-чупсы по четыре штуки в три одинаковых пакета. Андрей сказал: «Смотрите, ни в одном пакете нет трех одинаковых чупа-чупсов!» Лейсан сказала: «Верно. Но и трех разных чупа-чупсов тоже нет ни в одном пакете!» Тимур сказал: «И все пакеты получились разными!». Все трое были правы. Обязательно ли в каком-то пакете лежит два желтых и два красных чупа-чупса? Обоснуйте свой ответ. (20 баллов)

Ответ. Да, обязательно.

Решение. В каждом пакете есть чупа-чупсы разных цветов, иначе Андрей был бы не прав. Но чупа-чупсов трёх разных цветов не может быть ни в одном пакете, иначе была бы не права Лейсан. Значит, в каждом пакете есть чупа-чупсы ровно двух цветов: 2 чупа-чупса одного цвета и 2 чупа-чупса другого цвета (так как трёх одного цвета быть не может). Все пакеты получились разными, поэтому пара цветов в каждом пакете должна отличаться от пары цветов в другом пакете. Значит, в одном пакете было два жёлтых и два зеленых, в другом — два зеленых и два красных, а в третьем — два жёлтых и два красных чупа-чупса.

Критерии. В решении утверждается, но не доказано, что во всех трех пакетах лежит по две пары разноцветных чупа-чупсов — 7 баллов.

Задание 4. Паша записал во всех клетках таблицы 4×4 по одному числу так, что произведение чисел во всех строках и столбцах оказалось одинаковым и не равным нулю. Даша оставила восемь из этих чисел (см. рисунок), а остальные стерла. Какое число стояло в клетке, где нарисована звездочка? Обоснуйте свой ответ. (20 баллов)

1/2	32		
	4	8	2
4	1		
		$*$	16

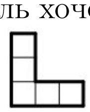
Ответ. $1/4$.

Решение. Обозначим через x второе сверху число в первом столбце. Тогда произведение чисел во второй строке (а, значит, и в любой строке и любом столбце) равно $64x$. Следовательно, в первой клетке нижней строки стоит 32, во второй клетке нижней строки — число $x/2$, а в клетке со звездочкой тогда стоит число $1/4$.

1/2	32		
x	4	8	2
4	1		
		$*$	16

Критерии. Только ответ — 3 балла.

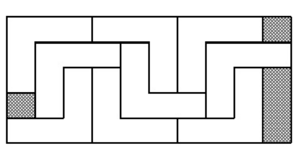
Арифметическая ошибка в конце верного решения — 15 баллов.

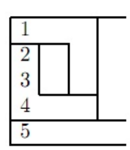
Задание 5. Айгуль хочет вырезать из прямоугольника 5×10 как можно больше фигурок из 5 клеток вида . Помогите ей это сделать и объясните, почему больше фигурок вырезать не удастся. Фигурки могут быть повёрнуты как угодно. Все вырезания должны идти по клеточкам. (20 баллов)

Ответ. 9 фигурок.

Решение.

Пример.





Оценка. Фигурки из пяти клеток называются «пентамино». Площадь прямоугольника равна 50, следовательно, в него поместится максимум 10 пентамино. Покажем, что без остатка разрезать нельзя. Если клетки 1 и 2 принадлежат разным фигуркам пентамино, тогда клетка 1 однозначно достраивается до пентамино, а затем клетка 2 тоже однозначно достраивается до другой пентамино. Теперь разрезать без остатка не удается, так как остается две изолированные клетки, зажатые между двумя пентамино. Следовательно, клетки 1 и 2 должны принадлежать одной пентамино. Но тогда этой же пентамино принадлежит клетка 3. Рассуждая аналогично, получим, что клетки 5, 4 и 3 тоже должны принадлежать одной пентамино. Но тогда две пентамино наложились по клетке 3. Таким образом, без остатка разрезеть нельзя, следовательно, можно получить не более 9 пентамино.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Только пример — 8 баллов.

Только оценка — 8 баллов.

Общие критерии оценивания.

Эти критерии применяются в том случае, когда невозможно применить критерии по задачам, указанные выше (например, если решение или продвижение в решении отличаются от тех, которые предполагало жюри).

Полное верное решение — 20 баллов.

Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влиящие на решение — 18–20 баллов.

Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влиящие на логику рассуждений — 15–17 баллов.

Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи — 5–9 баллов.

Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения — 0–3 баллов.

Решение неверно, продвижения отсутствуют, либо задача не решалась — 0 баллов.