Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2021-22 учебный год

11 класс

Задание 1. Пусть p — нечётное простое число. Найдите все целые x и y такие, что $x^3+y^3+p^3=x^2y+xy^2$.

(25 *баллов.*)

Ответ: $(0;-p)$, $(-p;0)$, $\left(-\frac{1}{2}(p^3-1);-\frac{1}{2}(p^3+1)\right)$, $\left(-\frac{1}{2}(p^3+1);-\frac{1}{2}(p^3-1)\right)$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $x^3+y^3-x^2y-xy^2=-p^3$ и разложим левую часть на множители:

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)-(x+y)xy=-p^3 \quad\Longleftrightarrow\quad (x+y)(x-y)^2=-p^3.$$

Таким образом, числа $x+y$ и $(x-y)^2$ являются степенями простого числа p. Но $(x-y)^2$ — чётная степень p, значит, множитель $x+y$ — это нечётная степень p, и так как $x+y\leqslant 0$, то

$$\begin{cases} x+y=-p, \\ x-y=\pm p, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+y=-p^3, \\ x-y=\pm 1. \end{cases}$$

В первом случае имеем $x=0$, $y=-p$ или $x=-p$, $y=0$, во втором — $x=-\frac{1}{2}(p^3-1)$, $y=-\frac{1}{2}(p^3+1)$ или $x=-\frac{1}{2}(p^3+1))$, $y=-\frac{1}{2}(p^3-1)$. Так как p – нечётное, то числа x и y в этих наборах — целые.

Критерии. Правильно указаны частные решения — не более 3-х баллов. Получено разложение на множители — 3 балла. Рассмотрен только один случай $x+y=-p$ или $x+y=-p^3$ – не более 15 баллов.

Задание 2. Функция f для всех действительных x, y удовлетворяет неравенствам $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$ и $f(x)\geqslant x$. Найдите все такие функции $f(x)$.

(25 *баллов.*)

Ответ: $f(x)\equiv x$.

Решение. Из неравенства $f(x)\geqslant x$ при $x=0$ следует, что $f(0)\geqslant 0$, а из второго неравенства при $y=0$ имеем: $f(x)=f(x+0)\geqslant f(x)+f(0)$, то есть $0\geqslant f(0)$, и значит, $f(0)=0$. Отсюда и из неравенства $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$ при $y=-x$ получим:

$$0=f(0)=f(x+(-x))\geqslant f(x)+f(-x) \quad\Longrightarrow\quad -f(-x)\geqslant f(x).$$

Снова используем первое неравенство $f(x)\geqslant x$ теперь для $-x$, получим $f(-x)\geqslant -x$ или $x\geqslant -f(-x)$. Значит,

$$x\geqslant -f(-x)\geqslant f(x) \quad\Longrightarrow\quad x\geqslant f(x).$$

Из условия $f(x)\geqslant x$ и полученного неравенства следует, что $f(x)=x$ для всех x.

Критерии. Только ответ — 2 балла. Доказательство равенства $f(0)=0$ — 5 баллов. Доказано неравенство $0\geqslant f(x)+f(-x)$ — ещё 5 баллов. Критерии суммируются.

Задание 3. Сумма нескольких натуральных чисел, в записи каждого из которых участвуют только цифры 3 и 0, равна $777\ldots77$ (2022 семёрки). Какое наименьшее число слагаемых может быть в этой сумме?

(25 *баллов.*)

Ответ: 9 *слагаемых.*

Пусть $M=777\ldots77=a_1+a_2+\ldots+a_n$, где числа a_k записываются только нулями и тройками. Сумма цифр числа M равна $2022\cdot 7$ и делится на 3. Тогда

$$\frac{1}{3}M=\underbrace{259\,259\ldots259}_{\text{2022 цифры}}=c_1+c_2+\ldots+c_n,$$

где числа $c_k = \frac{1}{3}a_k$ записываются только нулями и единицами. Поскольку $\frac{1}{3}M$ содержит девятку, наименьшее количество слагаемых в этой сумме равно 9. Эти слагаемые легко находятся для числа 259: $259 = 2 \cdot 111 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 1$. Умножая на три, получим: $777 = 2 \cdot 333 + 3 \cdot 33 + 4 \cdot 3$. Теперь «периодическим» повторением этой записи получаем:

$$\underbrace{777\ldots77}_{2022} = 2 \cdot \underbrace{333\ldots33}_{2022} + 3 \cdot \underbrace{330\,330\ldots33}_{2021} + 4 \cdot \underbrace{300\ldots300}_{2021}.$$

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Правильный пример — 15 баллов. Доказано, что слагаемых не меньше девяти — 10 баллов.

Задание 4. В неравнобедренном треугольнике ABC провели высоту BH, медиану BM и биссектрису BL. Точки P и Q — ортогональные проекции вершин A и C на прямую BL. Докажите, что точки M, H, P и Q лежат на одной окружности.

(25 *баллов*.)

Решение. Предположим, что $AB < BC$ (рис. 1). Тогда точка P лежит внутри треугольника ABC, а точка Q — вне треугольника. Обозначим через A' и C' точки пересечения прямых AP и BC, CQ и AB соответственно. Поскольку BP — биссектриса и $BP \perp AA'$, $BQ \perp CC'$, треугольники BAA' и BCC' — равнобедренные, и значит, $AP = PA'$ и $CQ = QC'$.

В треугольнике $AA'C$ точки P и M — середины сторон AA' и AC, поэтому PM — средняя линия, и значит, $PM \parallel BC$. Аналогично, $MQ \parallel BC'$. Следовательно, $\angle AMQ = \angle BAC$. Возможны два случая:

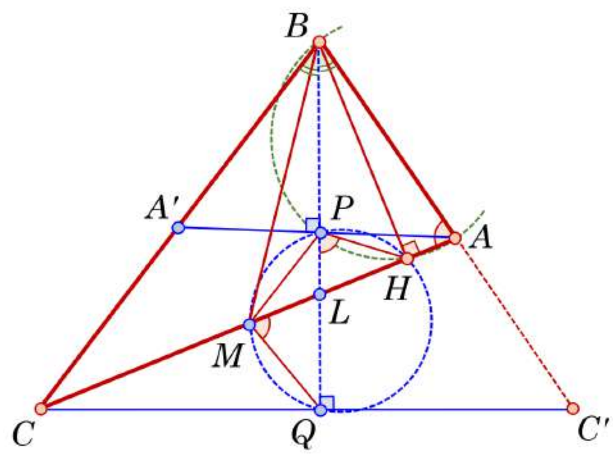

Рис. 1

а) $\angle BAC \leqslant 90°$. Точки A, H, P и B лежат на одной окружности с диаметром AB, поэтому четырёхугольник $AHPB$ — вписанный. Значит, $\angle HPQ = 180° - \angle HPB = \angle BAC = \angle HMQ$. Следовательно, точки H, P, M и Q лежат на одной окружности.

б) $\angle BAC > 90°$, тогда точки A, H, B и P лежат на одной окружности с диаметром AB, поэтому четырёхугольник $AHBP$ — вписанный. Значит, $\angle HPQ = 180° - \angle HPB = 180° - \angle HAB = \angle BAC = \angle HMQ$. Следовательно, точки H, P, M и Q лежат на одной окружности.

Критерии. Установлено равенство углов HPQ и BAC — 5 баллов. Доказано, что $PM \parallel BC$ или $MQ \parallel AB$ — 15 баллов.