Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2021-22 учебный год

10 класс

Задание 1. Квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ принимает целые кратные m значения при любых целых числах x. Найдите все такие натуральные $m > 1$.

(25 *баллов.*)

Ответ: $m = 2$.

Решение. Пусть m — искомый делитель для квадратного трёхчлена $P(x) = x^2 + px + q$. Тогда, в частности, числа $P(-1)$, $P(0)$ и $P(1)$ кратны m, и значит, комбинация $P(-1) + P(1) - 2P(0) = (1 + p - q) + (1 + p + q) - 2q = 2$ тоже делится на m. Так как $m > 1$, то $m = 2$.

Приведём пример квадратного трёхчлена $P(x)$, для которого число 2 является делителем при любых целых x. Пусть $P(x) = x(x + 1)$. Произведение двух последовательных целых чисел x и $x + 1$ всегда делится на 2, то есть условие выполняется.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Указан пример квадратного трёхчлена, удовлетворяющего условию при $m = 2$ — 10 баллов. Доказано, что кроме $m = 2$ других значений нет — 15 баллов.

Задание 2. Найдите все различные натуральные числа x и y, для которых справедливо равенство $x! + y = y! + x$.

(25 *баллов.*)

Ответ: $(1, 2)$ *и* $(2, 1)$.

Решение. Пусть $x > y$, то есть число $t = x - y$ — натуральное. Тогда

$$x! = y! \cdot (y + 1) \cdot \ldots \cdot (y + t) \geqslant y! \cdot (1 + 1) \cdot \ldots \cdot (1 + t) \quad \Longrightarrow \quad x! \geqslant y! \cdot (t + 1),$$

и значит, $x! - y! \geqslant y! \cdot t$. С другой стороны, по условию $x! - y! = x - y = t$, поэтому $t \geqslant y! \cdot t$. Отсюда $y! = 1$, и значит, $y = 1$. В этом случае исходное уравнение сводится к равенству $x! = x$. Но $x! > x$ при $x > 2$, и так как $x > 1$, то $x = 2$. Таким образом, в предположении $x > y$ единственным решением уравнения будет набор $(2, 1)$. При $y > x$ получаем ещё один набор $(1, 2)$.

Критерии. Указаны частные решения уравнения — не более 3 баллов. При $x > y$ доказано, что уравнение сводится к равенству $x! = x$ — 18 баллов. Упущен один из наборов при верном решении — 22 балла.

Задание 3. Последовательность целых чисел такова, что $x_0 = 0$ и $|\,x_n\,| = |\,x_{n-1} + 1\,|$ для всех натуральных n от 1 до 100. Какое наименьшее положительное значение может принимать выражение $|\,x_1 + x_2 + \ldots + x_{99}\,|$?

(25 *баллов.*)

Ответ: 18.

Решение. Возведём в квадрат соотношения $|x_n| = |x_{n-1} + 1|$ для всех натуральных n от 1 до 100.

$$\begin{cases} x_1^2 = 1, \\ x_2^2 = (x_1 + 1)^2 = x_1^2 + 2x_1 + 1, \\ x_3^2 = (x_2 + 1)^2 = x_2^2 + 2x_2 + 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{99}^2 = (x_{98} + 1)^2 = x_{98}^2 + 2x_{98} + 1, \\ x_{100}^2 = (x_{99} + 1)^2 = x_{99}^2 + 2x_{99} + 1. \end{cases}$$

Складывая эти равенства, получим

$$x_{100}^2 = 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_{99}) + 100,$$

то есть $S = |\,x_1 + x_2 + \ldots + x_{99}\,| = \frac{1}{2}\,|\,x_{100}^2 - 100\,|$. Заметим, что числа последовательности (x_n) с нечётными номерами n принимают только нечётные значения, а с чётными номерами n — только чётные значения. Поэтому положительный минимум выражения S достигается в том случае, когда слагаемое x_{100}^2 — ближайшее к 100 чётное число. Число 100 находится между квадратами чётных чисел 8^2 и 12^2, причём $|8^2 - 100| < |12^2 - 100|$. Значит, наименьшее положительное значение S будет равно $\frac{1}{2}|8^2 - 100| = 18$, если удастся доказать, что квадрат числа x_{100} может равняться 8^2.

Покажем один из способов построения последовательности (x_n), для которой этот случай возможен. Выберем $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\ldots$, $x_8 = 8$, $x_9 = -9$, $x_{10} = 8$, $x_{11} = -9$, $x_{12} = 8$, $\ldots$, $x_{99} = -9$, $x_{100} = 8$. Тогда $x_{100}^2 = 8^2$, и значит, $S = 18$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Пример последовательности (x_n), для которой достигается минимум S — 10 баллов. Доказана оценка $S \geqslant 18$ — 15 баллов. Если доказательства оценки нет, но отмечено, что минимум S — чётное число, — 3 балла.

Задание 4. В остроугольном треугольнике ABC на стороне AC взяли точку D, H — точка пересечения высот. Прямая, проходящая через H перпендикулярно отрезку DH, пересекает его стороны AB и BC в точках E и F, причём $EH = HF$. Найдите отношение $AD : DC$.

(25 *баллов*.)

Ответ: $AD : DC = 1 : 1$.

Первое решение. (Рис. 1.) Пусть L — основание высоты, опущенной из вершины A. Тогда

$$\angle AHD = 90^\circ - \angle AHE = 90^\circ - \angle LHF = \angle LFH = \angle BFH.$$

Кроме того, $\angle HAD = \angle FBH = 90^\circ - \angle C$. Следовательно, треугольники AHD и BFH подобны. Аналогично доказывается подобие треугольников CHD и BEH. Значит,

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AD}{HD} \cdot \frac{HD}{CD} = \frac{BH}{FH} \cdot \frac{EH}{BH} = \frac{EH}{FH} = 1.$$

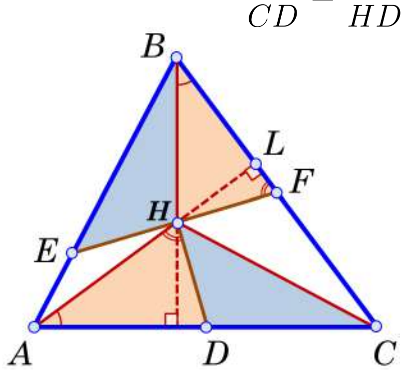

Рис. 1

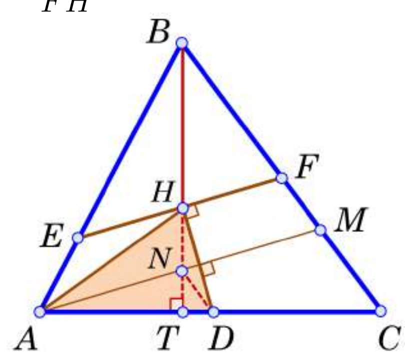

Рис. 2

Второе решение. (Рис. 2.) Через точку A проведём прямую, параллельную EF, пусть она пересекает сторону BC в точке M. (Если она пересекает продолжение стороны BC, то сделаем аналогичное построение для вершины C.) Тогда $AM \perp HD$. Пусть высота BT пересекает отрезок AM в точке N. Так как $EH = HF$, то по теореме Фалеса $AN = NM$. Прямая DN проходит через точку пересечения высот треугольника AHD, и значит, $DN \perp AH$. Но прямая AH — это высота треугольника ABC, $AH \perp BC$, поэтому $DN \parallel BC$. Отсюда следует, что прямая DN совпадает со средней линией треугольника AMC, и значит, $AD = DC$.

Критерии. Доказано подобие треугольников AHD и BFH (или CHD и BEH) — 15 баллов. Доказано (второе решение), что N — точка пересечения высот в треугольнике AHD — также 15 баллов.