Межрегиональные предметные олимпиады КФУ профиль «Математика» Заключительный этап 2020—21 учебный год 9 класс.

Задача 1

У Миши есть 32 блока-кирпичика размером $2 \times 3 \times 3$. Сможет ли он уложить их в коробку в форме прямоугольного параллелепипеда размерами $8 \times 8 \times 9$? Должны быть использованы все кубики, наружу из коробки ничего не должно выдаваться. Обоснуйте свой ответ.

Задача 2

Каждый из приведенных квадратных трехчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + ax + c$ имеет два ненулевых целых корня. Один из корней второго трехчлена в 87 раз больше, чем первый корень первого трехчлена, а другой — в 95 раз больше, чем второй корень первого трехчлена. Найдите минимально возможное значение |b|. Обоснуйте свой ответ.

Задача 3

Дана трапеция ABCD с основаниями AB и CD такая, что AB+CD=AD. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Прямая, параллельная основаниям трапеции и проходящая через точку O, пересекает боковую сторону AD в точке K. Докажите, что $\angle BKC = 90^{\circ}$.

Задача 4

Вещественные числа x и y таковы, что x > 2, y > 3. Докажите, что

$$\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{y^2-9}} \geqslant 10.$$