Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2020–21 учебный год
9 класс.
Решения задач и критерии оценивания

Задача 1

У Миши есть 32 блока-кирпичика размером $2\times3\times3$. Сможет ли он уложить их в коробку в форме прямоугольного параллелепипеда размерами $8\times8\times9$? Должны быть использованы все кубики, наружу из коробки ничего не должно выдаваться. Обоснуйте свой ответ.

Решение. Рассмотрим слой размером $8\times8\times1$, примыкающий к грани параллелепипеда размером 8×8. В этом слое 64 кубика $1\times1\times1$ и должен быть заполнен слоями толщины 1, прилегающими к граням блоков. Но грани блоков имеют размеры 2×3 или 3×3, поэтому каждый блок заполняет 6 или 9 кубиков из этого слоя. Но число 64 невозможно представить в виде суммы $6a+9b$, так как 64 не делится на 3, а 6 и 9 — делятся.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Задача 2

Каждый из приведенных квадратных трехчленов x^2+ax+b и x^2+ax+c имеет два ненулевых целых корня. Один из корней второго трехчлена в 87 раз больше, чем первый корень первого трехчлена, а другой — в 95 раз больше, чем второй корень первого трехчлена. Найдите минимально возможное значение $|b|$. Обоснуйте свой ответ.

Ответ. 2021.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни первого трехчлена, а x_3 и x_4 — корни второго трехчлена. По условию, все эти числа не равны нулю и $x_3=87x_1$, $x_4=95x_2$. По теореме Виета,

$$x_1+x_2=-a, \quad x_3+x_4=-a,$$

откуда $x_1+x_2=x_3+x_4=87x_1+95x_2$. Преобразовав, получаем $86x_1+94x_2=0$, или

$$47x_2=-43x_1.$$

Так как числа x_1 и x_2 — целые, а числа 43 и 47 — взаимно простые (они вообще простые), отсюда следует, что x_2 делится на 43, то есть, $x_2=43k$. Подставив это в предыдущее уравнение и поделив на 43, получим, что $x_1=-47k$, где k — целое число, не равное нулю.

По теореме Виета, $b=x_1x_2=(-47k)\cdot 43k=-2021k^2$, откуда

$$|b|=2021k^2\geqslant 2021,$$

так как $k^2 \geqslant 1$ для целых чисел, не равных нулю. Легко видеть, что при $k = 1$ (или при $k = -1$) неравенство обращается в равенство, поэтому минимальное значение $|b|$ равно 2021 и достигается, например, когда $x_1 = -47$, $x_2 = 43$. Тогда $a = 4$, $b = -2021$, $c = 87 \cdot 95 \cdot (-2021) = -16703565$.

Критерии. Доказана оценка, что $|b| \geqslant 2021$ — 15 баллов.

Получено соотношение $47x_2 = -43x_1$ или равносильное, дальнейшие продвижения отсутствуют или неверны — 3 балла.

При доказательстве оценки не доказано, что x_2 делится на 43 (или что x_1 делится на 47), а просто сформулировано, что нужно взять $x_1 = \pm 47$, $x_2 = \mp 43$ (тем самым, фактически приводится пример на 2021) — 5 баллов за оценку (т.е., снимается 10 баллов).

При доказательстве оценки не сказано, что k^2 не может равняться нулю, так как корни ненулевые — снимается 3 балла.

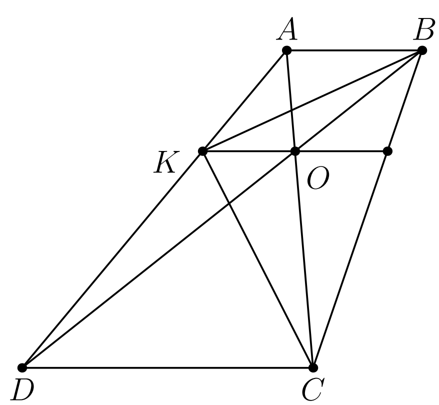
Приведен пример, показывающий, что $|b|$ может равняться 2021 — 10 баллов.

Задача 3

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD такая, что $AB + CD = AD$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Прямая, параллельная основаниям трапеции и проходящая через точку O, пересекает боковую сторону AD в точке K. Докажите, что $\angle BKC = 90^\circ$.

Решение. Отметим на отрезке AD точку K' такую, что $DK' = DC$, $AK' = AB$, она существует, так как $AB + DC = AD$. Из этого равенства следует, что $\dfrac{AK'}{DK'} = \dfrac{AB}{CD}$. Заметим, что $\dfrac{AO}{CO}$ так же равно $\dfrac{AB}{CD}$ в силу подобия треугольников AOB и COD. Из равенства $\dfrac{AK'}{DK'} = \dfrac{AO}{CO}$ следует параллельность прямых OK' и CD (например, по обратной теореме Фалеса, или по подобию треугольников $AK'O$ и ADC по углу и двум сторонам). Таким образом, точка K' совпадает с точкой K.

Отсюда следует, что треугольники AKB и CKD — равнобедренные. Поэтому $\angle ABK = \angle AKB = \alpha$, $\angle DCK = \angle DKC = \beta$. Кроме того, из параллельности прямых AB, OK и CD следует, что $\angle BKO = \angle ABK = \alpha$, $\angle OKC = \angle KCD = \beta$. Отсюда следует, что развернутый угол AKD равен $2\alpha + 2\beta$. Поэтому $\angle BKC = \alpha + \beta = 90^\circ$.



Критерии. Задача решена в предположении, что точки K и K' совпадают, но этот факт не доказан — 10 баллов.

Доказано только, что точки K и K' совпадают — 10 баллов.

Задача 4

Вещественные числа x и y таковы, что $x > 2$, $y > 3$. Докажите, что

$$\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{y^2-9}} \geqslant 10.$$

Решение. Сначала докажем, что для положительных чисел a, b, c, d справедливо неравенство

$$\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \leqslant \sqrt{(a+c)(b+d)}. \qquad (1)$$

Действительно, обе части неравенства положительны. Возведя его в квадрат получим $ab+cd+2\sqrt{abcd} \leqslant ab+bc+ad+cd$ или $2\sqrt{ad\cdot bc} \leqslant ad+bc$. Последнее неравенство есть неравенство о средних для чисел ad и bc.

Из неравенства (1) следует, что

$$\sqrt{x^2-4}+\sqrt{y^2-9} = \sqrt{(x-2)(x+2)}+\sqrt{(y-3)(y+3)} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(x-2+y-3)(x+2+y+3)} = \sqrt{(x+y-5)(x+y+5)}.$$

Обозначим $t = x+y > 5$. Тогда

$$\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{y^2-9}} \geqslant \frac{(x+y)^2}{\sqrt{(x+y-5)(x+y+5)}} = \frac{t^2}{\sqrt{t^2-25}}.$$

Осталось доказать, что

$$\frac{t^2}{\sqrt{t^2-25}} \geqslant 10.$$

Возводя в квадрат, получим равносильное неравенство

$$\frac{t^4}{t^2-25} \geqslant 100 \quad\iff\quad t^4-100(t^2-25) \geqslant 0 \quad\iff\quad t^4-100t^2+2500 = (t^2-50)^2 \geqslant 0.$$

Неравенство доказано.

Отметим, что минимальное значение 10 достигается, когда $x+y = t = \sqrt{50}$. Но еще необходимо, чтобы достигалось равенство в неравенстве (1). Для этого должно выполняться равенство $ad = bc$, то есть, $(x-2)(y+3) = (x+2)(y-3)$. Раскрыв скобки, получим уравнение $6x = 4y$. Система уравнений

$$x+y = 5\sqrt{2}, \quad 3x = 2y$$

имеет единственное решение $x = 2\sqrt{2}$, $y = 3\sqrt{2}$.

Второе решение. Обозначим $a = \sqrt{x^2-4}$, $b = \sqrt{y^2-9}$, тогда $a, b > 0$ и $x = \sqrt{a^2+4}$, $y = \sqrt{b^2+9}$. Имеем

$$\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{y^2-9}} = \frac{(\sqrt{a^2+4}+\sqrt{b^2+9})^2}{a+b} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2\left(\dfrac{a+2}{2}+\dfrac{b+3}{2}\right)^2}{a+b} = \frac{2(a+b+5)^2}{4(a+b)} = \frac{1}{2}\left(a+b+10+\frac{25}{a+b}\right) \geqslant 10,$$

так как
$$u + \frac{25}{u} \geqslant 10 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(u-5)^2}{u} \geqslant 0.$$
В решении использовано неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим
$$\sqrt{\frac{u^2+v^2}{2}} \geqslant \frac{u+v}{2}.$$

Критерии. Задача сведена к верному неравенству от одной переменной, которое не доказано — 10 баллов.

В верном решении использовано верное, но не общеизвестное неравенство, которое не доказано (например, $\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \leqslant \sqrt{(a+c)(b+d)}$) — не выше 15 баллов.