

Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2020-21 учебный год

11 класс

1. Даны три целых числа. Из первого числа вычли сумму цифр второго числа, из второго вычли сумму цифр третьего, а из третьего вычли сумму цифр первого числа. Могут ли эти разности равняться соответственно а) 2, 3, 4? б) 3, 4, 5?

(25 баллов.)

Ответ: а) могут; б) не могут.

а) Например, подходят числа 10, 8, 5. Тогда соответствующие разности равны $10 - 8 = 2$, $8 - 5 = 3$, $5 - 1 = 4$.

б) Пусть a, b, c — исходные числа. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа n . По признаку делимости на 9 числа n и $S(n)$ имеют равные остатки при делении на 9, и значит, разность $n - S(n)$ кратна 9. По условию, разности $a - S(b)$, $b - S(c)$, $c - S(a)$ равны числам 3, 4, 5 соответственно. Тогда их сумма

$$(a - S(b)) + (b - S(c)) + (c - S(a)) = (a - S(a)) + (b - S(b)) + (c - S(c))$$

должна делиться на 9. С другой стороны, эта сумма равна $3 + 4 + 5 = 15$ и на 9 не делится, противоречие.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. За правильное решение пункта а) — 10 баллов, пункта б) — 15 баллов.

2. Существует ли такая непостоянная функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, что при всех действительных x выполняется равенство

а) $f(\sin x) + f(\cos x) = 1$? б) $f(\sin x) - f(\cos x) = 1$?

(25 баллов.)

Ответ: а) существует; б) не существует.

а) Например, подходит функция $f(t) = t^2$, так как $f(\sin x) + f(\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

б) Пусть такая функция существует. Тогда при $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$ имеем равенства

$$\begin{aligned} f(\sin 0) &= f(\cos 0) + 1, & f(0) &= f(1) + 1, \\ f\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) &= f\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) + 1. & \iff & f(1) = f(0) + 1. \end{aligned}$$

Отсюда $f(1) = (f(1) + 1) + 1$, противоречие.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. За правильное решение пункта а) — 10 баллов, пункта б) — 15 баллов.

3. Натуральное число n назовём *удачным*, если его можно единственным образом разбить в сумму 10 различных натуральных чисел (порядок слагаемых не важен). Найдите все удачные числа.

(25 баллов.)

Ответ: 55 и 56.

Пусть число n — удачное, $n = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$, где $a_1 < a_2 < \dots < a_{10}$ — натуральные слагаемые. Если предположить, что $a_1 > 1$, то n можно разбить в сумму различных натуральных слагаемых еще одним способом: $n = (a_1 - 1) + a_2 + \dots + (a_{10} + 1)$. Таким образом, $a_1 = 1$.

Далее, если предположить, что $a_2 > 2$, то для n опять можно привести другое разбиение: $n = a_1 + (a_2 - 1) + a_3 + \dots + (a_{10} + 1)$. Значит, $a_2 = 2$. Продолжая так далее, получаем $a_3 = 3$, $a_4 = 4, \dots, a_9 = 9$. Если $a_{10} > 11$, то $a_9 + 1 < a_{10} - 1$, и снова можно сконструировать другое разбиение.

Наконец, нетрудно видеть, что при $a_{10} = 10$ или $a_{10} = 11$ получающиеся числа 55 и 56 являются удачными.

Критерии. За каждый правильный пример удачного числа — 5 баллов. Доказано, что других чисел нет — ещё 15 баллов.

4. В угол с вершиной A вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках B и C . Прямая, проходящая через A , пересекает окружность в точках D и E . Хорда BX параллельна прямой DE . В каком отношении прямая XC делит хорду DE ?

(25 баллов.)

Ответ: 1 : 1.

ПЕРВОЕ РЕШЕНИЕ. (Рис. 2.) Пусть O — центр окружности, M — точка пересечения CX и DE . Докажем, что $OM \perp DE$, и значит, $DM = ME$.

Прежде всего, угол DMC равен полусумме дуг CD и EX . Так как дуги между параллельными хордами BX и DE равны, то $\widehat{DB} = \widehat{EX}$, поэтому

$$\angle CMD = \frac{1}{2}(\widehat{CD} + \widehat{EX}) = \frac{1}{2}(\widehat{CD} + \widehat{DB}) = \frac{1}{2}\widehat{CB} = \frac{1}{2}\angle COB = \angle COA.$$

(Последнее следует, например, из равенства прямоугольных треугольников AOB и AOC .) Из равенства углов COA и CMA следует, что точки A, C, M, O лежат на одной окружности. Поскольку радиус OC перпендикулярен касательной AC , диаметр этой окружности совпадает с отрезком AO . Значит, $\angle AMO = 90^\circ$, то есть $OM \perp DE$.

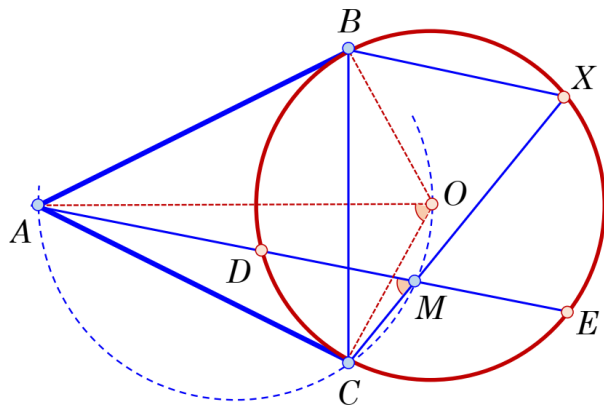


Рис. 2

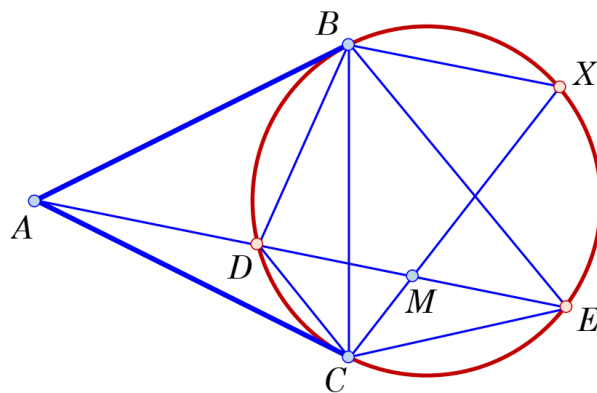


Рис. 3

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ. (Рис. 3.) Отметим, что $\angle BCD = \angle ECX$, так как соответствующие дуги заключены между параллельными хордами. Кроме того, из равенства углов ABD и AEB следует подобие треугольников ABD и AEB , и значит, равенство $BD/BE = AD/AB$. Аналогично получаем, что $CD/CE = AD/AB$, то есть $BD \cdot CE = CD \cdot BE = \frac{1}{2}BC \cdot DE$ (последнее равенство следует из теоремы Птолемея.)

Пусть теперь CX пересекает DE в точке M . Тогда треугольники CBD и CME подобны, следовательно, $BD \cdot CE = CB \cdot EM$. Отсюда и из предыдущего равенства получаем, что $EM = ED/2$.

Критерии. Доказано, что точки A, C, M, O лежат на одной окружности — 15 баллов.