Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2020-21 учебный год

10 класс

1. На доске написаны числа a, b и c. Их стёрли, а взамен записали числа $a^2 + 2bc$, $b^2 + 2ca$, $c^2 + 2ab$. После этого оказалось, что на доске написаны те же числа, что и вначале (возможно, в другом порядке). Найдите все возможные значения суммы $a + b + c$.

(25 *баллов.*)

Ответ: 0 *или* 1.

Из условия следует, что сумма «новых» чисел совпадает с суммой $s = a + b + c$ исходных чисел, то есть

$$a^2 + 2bc + b^2 + 2ca + c^2 + 2ab = s.$$

Выражение в левой части совпадает с числом $(a+b+c)^2 = s^2$, поэтому это равенство равносильно такому: $s^2 = s$, откуда $s = 0$ или $s = 1$.

Осталось привести примеры чисел a, b и c, при которых получаются указанные значения s. Для $s = 1$ подойдёт, например, набор $a = b = c = \frac{1}{3}$. Для $s = 0$ можно взять набор $a = b = -c = \frac{1}{3}$.

Критерии. За каждое правильное значение суммы — 7 баллов. Указаны примеры наборов, для которых эти значения достигаются — ещё 11 баллов.

2. Найдите наименьшее возможное значение функции

$$f(x) = |\,x + 1\,| + |\,x + 2\,| + \ldots + |\,x + 100\,|.$$

(25 *баллов.*)

Ответ: 2500.

Воспользуемся известным неравенством $|\,a\,|+|\,b\,| \geqslant |\,a-b\,|$, тогда $|\,x+k\,|+|\,x+m\,| \geqslant |\,k-m\,|$. Сгруппировав в исходной сумме равноудаленные от концов слагаемые, получим

$$\begin{aligned} f(x) &= (|\,x+1| + |x+100|) + (|x+2| + |x+99|) + \ldots + (|x+50| + |x+51|) \geqslant \\ &\geqslant (100-1) + (99-2) + \ldots + (51-50). \end{aligned}$$

Последняя сумма из 50 слагаемых — это арифметическая прогрессия, она равна $\frac{1}{2}100\cdot 50 = 2500$. Это значение является наименьшим для $f(x)$, оно достигается, например, при $x = -50$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Найдено наименьшее значение — 18 баллов. Указано значение x, при котором оно достигается — ещё 7 баллов.

3. Найдите все значения c, при которых для *любых* положительных a, b и $a > b$ выполнено неравенство: $a + \sqrt{b+c} > b + \sqrt{a+c}$.

(25 *баллов.*)

Ответ: $c = \frac{1}{4}$.

Запишем неравенство в виде $a - b > \sqrt{a+c} - \sqrt{b+c}$. Умножив и поделив правую часть на сопряженную величину, представим неравенство в виде

$$a - b > \frac{a-b}{\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c} > 1.$$

Последнее неравенство должно выполняться при любых $a > b > 0$. С увеличением значений a и b левая часть только увеличивается, поэтому достаточно, чтобы неравенство выполнялось только для наименьшего значения выражения $\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}$, которое, очевидно, больше, чем $\sqrt{0+c}+\sqrt{0+c}=2\sqrt{c}$. Значит, $2\sqrt{c}=1$, то есть $c=\frac{1}{4}$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что при $c=\frac{1}{4}$ условие задачи выполняется — 12 баллов.

4. В треугольнике ABC сторона AC больше AB, прямая l — биссектриса внешнего угла C. Прямая, проходящая через середину AB и параллельная l, пересекает AC в точке E. Найдите CE, если $AC=7$ и $CB=4$. (Внешний угол треугольника — это угол, смежный с внутренним углом при данной вершине.)

(25 *баллов.*)

Ответ: $\frac{11}{2}$.

(Рис. 1.) Пусть F — точка пересечения прямой l и прямой AB. Поскольку $AC > AB$, точка E лежит на отрезке AC, точка F — на луче AB. Через точку B проведём параллель к AC до пересечения с CF в точке G. Тогда $\angle BGC = \angle BCG$, и значит, треугольник CBG — равнобедренный, $BG=BC$. Из подобия треугольников AFC и BFG имеем:

$$\frac{FA}{FB}=\frac{AC}{BG}=\frac{AC}{BC}=\frac{7}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AB}{AF}=\frac{3}{7} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AO}{AF}=\frac{AB/2}{AF}=\frac{3}{14}\,.$$

Так как треугольники ACF и AEO также подобны, то

$$\frac{AE}{AC}=\frac{AO}{AF}=\frac{3}{14}\,,$$

поэтому $AE=\frac{3}{14}AC=\frac{3}{2}$ и $EC=AC-AE=\frac{11}{2}$.

Критерии. Доказано подобие треугольников AFC и BFG — 10 баллов, доказано подобие ACF и AEO — ещё 10 баллов.

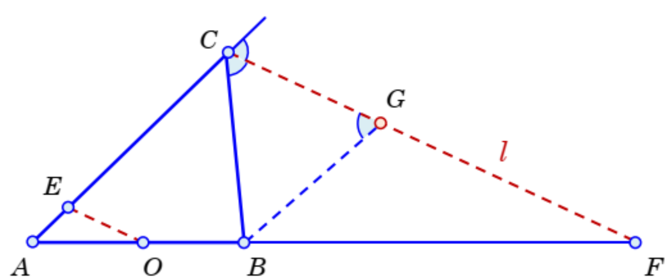

Рис. 1