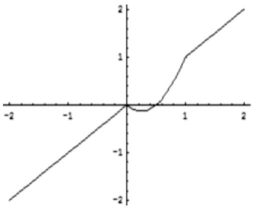
**Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета по предмету «Математика» 2013-2014 учебный год**

**9 класс. Краткие решения.**

**1.** Постройте график функции $y = x^2 - |x - x^2|$



**Решение.** Выражение $x-x^2$ положительно при $0 \le x \le 1$. Поэтому $|x-x^2| = x-x^2$, если $0 \le x \le 1$ и $|x-x^2| = x^2-x$, если $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Поэтому $y = x$ при $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ и $y = 2x^2-x$ при $0 \le x \le 1$.

**2.** Дано 50 чисел. Известно, что среди их попарных произведений ровно 500 отрицательных. Определите количество нулей среди данных чисел.

**Решение**. Пусть $m$, $n$ и $p$ — количество отрицательных, нулей и положительных среди данных 50 чисел. Тогда из условия задачи имеем: $m + n + p = 50$ и $m \cdot p = 500$. Отсюда следует, что $m$ и $p$ — делители 500, сумма которых не превосходит 50. Среди всех делителей числа 500 этим свойством обладает только пара 20 и 25, т.е. $m + p = 45$, отсюда $n = 5$.

**3.** В треугольнике $ABC$ проведены две высоты $AK$ и $CL$. Найдите величину угла $B$, если известно, что $AC = 2 \cdot LK$.

**Решение**. Построим на стороне $AC$ как на диаметре окружность, которая пройдет через точки $L$ и $K$, так как $\angle ALC = \angle AKC = 90°$. По условию $AC = 2 \cdot LK$, и значит, отрезок $LK$ равен *радиусу* построенной окружности, поэтому дуга, стягиваемая хордой $LK$, составляет 60°. Отсюда угол $LCK$, опирающийся на эту дугу, равен 30°. Далее, если угол $B$ — острый, то $\angle B = 90° - \angle LCB = 60°$ (рис. 2,*а*); если же угол $B$ — тупой, то $\angle CBL = 90° - \angle BCL = 60°$ (рис. 2,*б*), и значит, $\angle B = 180° - \angle CBL = 120°$.

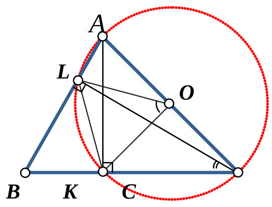



*Рис.2,а*

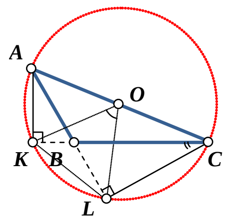



*Рис.2,б*

**4.** Сколькими способами на доске размером 8×8можно расставить 8одинаковых ладей симметрично относительно *диагонали*, проходящей через нижнее левое угловое поле?

**Решение.** На доске 8×8 имеется 8 диагональных и 56 недиагональных клеток, последние разбиваются на 28 пар симметричных относительно диагонали клеток. Все расположения ладей разобьем на 5 непересекающихся классов — в $m$-й класс отнесем расположения, при которых $m$ пар ладей попадают на диагональ.

При $m = 0$ ни одна из ладей не стоит на диагонали, и значит, все ладьи занимают 4 из 28 пар симметричных недиагональных клеток. Таких расположений будет $C_{28}^4 = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20\,475$. При $m = 1$ на диагонали находятся ровно две ладьи, которые могут располагаться на ней $C_8^2 = 28$ способами. Остальные 6 ладей занимают 3 из 28 пар симметричных недиагональных клеток. Поэтому таких расстановок будет $C_8^2 \cdot C_{28}^3 = 91\,728$.

Аналогичными рассуждениями находим количество требуемых расстановок при $m = 1$ и $m = 3$, а именно, $C_8^4 \cdot C_{28}^2 = 26\,460$ и $C_8^6 \cdot C_{28}^1 = 784$ соответственно. Наконец, при $m = 4$ есть только одна расстановка, при которой все ладьи попадают на диагональ. Общее число симметричных расстановок равно

$$C_{28}^4 + C_8^2 \cdot C_{28}^3 + C_8^4 \cdot C_{28}^2 + C_8^6 \cdot C_{28}^1 + 1 = 139\,448.$$