Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета по предмету «Математика» 2013-2014 учебный год

10 класс. Краткие решения.

1. Сколько положительных чисел среди 2014 членов последовательности: sin1°, sin10°, sin100°, sin1000°, ... ?

Решение. При $n > 3$ имеем

$10^n - 1000 = 10^3 (10^{n-3} - 1) = 25 \cdot 40 \cdot (10^{n-3} - 1)$.

Поскольку $10^{n-3} - 1$ делится на 9, отсюда следует, что $10^n - 1000$ делится на 360. Поэтому все члены последовательности, начиная с четвертого, совпадают с $\sin 1000° = \sin(3 \cdot 360° - 80°) = \sin(-80°) < 0$. Таким образом, в последовательности *три* положительных члена — это sin1°, sin10°, sin100°.

2. Решите неравенство $\arccos x \geq \arccos(x^2)$.

Решение. Запишем ОДЗ: $|x| \leq 1$, $|x^2| \leq 1$.

Решением этой системы неравенств будет интервал $[-1;\ 1]$. Заметим, что функция $y = \arccos x$ — убывающая. Следовательно, неравенство из условия эквивалентно системе неравенств $x \leq x^2$, $-1 \leq x \leq 1$. Ее решением является множество $[-1;0] \cup \{1\}$.

3. Площадь четырехугольника равна 1. Какую наименьшую величину может иметь сумма его диагоналей?

Решение. Сначала найдем наименьшее значение для произведения диагоналей четырехугольника. Для его площади имеем равенство: $2S = xy\sin\alpha$, в котором x, y — диагонали четырехугольника, а α — угол между ними. По условию $S = 1$, и значит, $2 = xy\sin\alpha \leq xy$.

Теперь воспользуемся неравенством о среднем геометрическом $2\sqrt{xy} \leq x+y$, из которого получим наименьшее значение для суммы диагоналей четырехугольника: $2\sqrt{2} \leq x+y$.

4. На какое наименьшее натуральное число N надо умножить 999 999, чтобы получилось число, записанное одними единицами?

Решение. Заметим, что $999\,999 = 10^6 - 1$. Число, записанное одними единицами, имеет вид $\frac{1}{9}(10^n - 1)$. Поэтому условие задачи означает, что

$(10^6 - 1) \cdot N = \dfrac{10^n - 1}{9}$, т.е. $N = \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{10^n - 1}{10^6 - 1}$.

Теперь заметим, что если $n = 6k + r$, то $10^n - 1 = (10^{6k+r} - 10^r) + 10^r - 1$. Выражение в первой скобке делится на $10^6 - 1$, поэтому $10^n - 1$ делится на $10^6 - 1$ только в том случае, когда остаток $10^r - 1 = 0$, т.е. $r = 0$, и значит, $n = 6k$. Поэтому

$$N = \frac{1}{9} \cdot \frac{10^{6k} - 1}{10^6 - 1} = \frac{1}{9} \cdot (10^{6k-6} + 10^{6k-12} + \ldots + 10^6 + 1).$$

Число в скобках делится на 9, когда сумма его цифр делится на 9. Но десятичная запись этого выражения состоит только из 0 и 1, причем количество единиц равно k. Отсюда следует, что наименьшее значение k, при котором N будет целым числом, равно 9. В этом случае, $n = 54$ и

$$N = \frac{1}{9} \cdot (10^{48} + 10^{42} + 10^{36} + 10^{30} + 10^{24} + 10^{18} + 10^{12} + 10^6 + 1) =$$

111111 222222 … 777777 88888 9 .