

**Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета
по предмету «Математика», очный тур**

2012–2013 учебный год

11 класс

1. (25 б.) Докажите, что функция

$$f(x) = \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x + \cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

является нечетной.

2. (25 б.) Доказать, что для любого n многочлен $(x + 1)^{2n+1} + x^{n+2}$ делится на многочлен $x^2 + x + 1$.
3. (25 б.) На плоскости даны точка M и окружность ω . Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки M до двух концов диаметра окружности ω не зависит от выбора диаметра.
4. (25 б.) Доказать, что $(1 + \sqrt{3})(1 + \sqrt[3]{3})(1 + \sqrt[4]{3}) \dots (1 + \sqrt[11]{3}) > 2013\sqrt[3]{3}$.