

**Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета  
по предмету «Математика», очный тур**

**2012–2013 учебный год**

**10 класс**

1. (25 б.) Произведение четырех чисел – корней уравнений  $x^2 + 2bx + c = 0$  и  $x^2 + 2cx + b = 0$ , равно 1. Известно, что числа  $b$  и  $c$  положительны. Найдите их.
2. (25 б.) Два игрока по очереди заменяют один (любой) из коэффициентов  $a_7, \dots, a_0$  в выражении

$$a_7 \cdot 8^7 + a_6 \cdot 8^6 + a_5 \cdot 8^5 + \dots + a_2 \cdot 8^2 + a_1 \cdot 8 + a_0 \cdot 1$$

на  $+1$  или  $-1$  (по своему выбору). Докажите, что второй игрок всегда может добиться того, что результат после его последнего хода будет делиться на 13.

3. (25 б.) Докажите неравенство

$$\frac{1}{1 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{1}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{2012 \cdot \sqrt{2013} + 2013 \cdot \sqrt{2012}} > 0,97$$

4. (25 б.) В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BK$  и на сторонах  $BA$  и  $BC$  взяты соответственно точки  $M$  и  $N$  так, что  $\angle AKM = \angle CKN = \frac{1}{2} \angle ABC$ . Докажите, что прямая  $AC$  касается окружности, описанной около треугольника  $MBN$ .