Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета по предмету «Математика»

9 класс. Краткие решения

1. Можно ли выбрать параметры a, b, c так, что для всех x верно равенство

$$(x+a)^2 + (2x+b)^2 + (2x+c)^2 = (3x+1)^2 \ ?$$

Решение. Раскроем скобки: $x^2 + 2ax + a^2 + 4x^2 + 4bx + b^2 + 4x^2 + 4cx + c^2 = 9x^2 + 6x + 1$, откуда $(2a + 4b + 4c)x + a^2 + b^2 + c^2 = 6x + 1$. Достаточно подобрать числа a, b, c так, чтобы $a + 2b + 2c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Подходят числа $a = 1/3$, $b = c = 2/3$.

2. Азат выписал подряд все числа месяца: 123456789101112... и покрасил три дня (дни рождения своих друзей), никакие два из которых не идут подряд. Оказалось, что все непокрашенные участки состоят из одинакового количества цифр. Докажите, что первое число месяца покрашено.

Решение. Всего выписано 47, 49, 51 или 53 числа. Допустим, число 1 не покрашено. Если наименьшее из покрашенных чисел двузначное, то первый из непокрашенных участков состоит из нечётного числа цифр (9 и какое-то количество двузначных), а все остальные — из чётного числа цифр. Если же наименьшее из покрашенных чисел однозначное, то первый из непокрашенных участков состоит не более чем из 8 цифр. Но это слишком мало: покрашенных цифр в этом случае не более 5, непокрашенных — не более $8 \cdot 4 = 32$, итого — не более 37 цифр, а даже самый короткий месяц (февраль невисокосного года) даёт 47 цифр. В обоих случаях получили противоречие. Значит, число 1 должно быть покрашено.

3. 20 шахматистов сыграли турнир в один круг (каждый сыграл с каждым по одной партии). Журналист в репортаже сообщил, что каждый участник выиграл столько же партий, сколько и свел вничью. Докажите, что журналист ошибся.

Решение. Каждый игрок сыграл 19 партий. Если i-тый участник выиграл a_i партий, то сыграл вничью тоже a_i матчей, а проиграл $19 - 2a_i$ партий. Так как выигранная одним участником партия является проигранной для другого, то суммарное количество всех выигранных партий равно суммарному количеству всех проигранных. Отсюда $a_1 + \ldots + a_{20} = (19 - 2a_1) + \ldots + (19 - 2a_{20})$, тогда $a_1 + \ldots + a_{20} = 19 \cdot 20/3$, но то число не является целым.

4. В треугольнике ABC стороны $CB = a$, $CA = b$. Биссектриса угла ACB пересекает сторону AB в точке K, а описанную вокруг треугольника окружность — в точке M. Окружность, описанная около треугольника AMK, вторично пересекает прямую AC в точке P. Найдите длину отрезка AP.

Решение. Треугольник CPK равен треугольнику CBK, поскольку CK — общая сторона, $\angle PCK = \angle BCK$, $\angle KPC = \angle KMA = \angle CBK$. Последние два равенства следуют из того, что вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны. Следовательно, $AP = |CP - CA| = |a - b|$.