Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета по предмету «Математика»

11 класс. Краткие решения.

1. Докажите, что функция
$$f(x) = \frac{1+\sin x - \cos x}{1+\sin x + \cos x}, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$
является нечетной.

Решение. $f(x) = \frac{1-\cos x+\sin x}{1+\cos x+\sin x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, а эта функция нечетна.

2. Доказать, что для любого n многочлен $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$ делится на многочлен x^2+x+1.

Решение. Индукция по n. При $n=0$ имеем: $(x+1)^{2\cdot 0+1}+x^{0+2} = x^2+x+1$. При $n=k+1$ имеем:
$$(x+1)^{2(k+1)+1}+x^{(k+1)+2} = (x+1)^2(x+1)^{2k+1}+x\cdot x^{k+2} =$$
$$(x^2+2x+1)(x+1)^{2k+1}+x\cdot x^{k+2} = (x^2+x+1)(x+1)^{2k+1}+x((x+1)^{2k+1}+x^{k+2}).$$

3. На плоскости даны точка M и окружность ω Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки M до двух концов диаметра окружности ω не зависит от выбора диаметра.

Решение. Пусть C — центр окружности ω, R — ее радиус, $M=O$ — начало координат. а A и B — концы некоторого диаметра окружности ω. Обозначим $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$, $\overrightarrow{CA}=\mathbf{x}$, тогда $\overrightarrow{CB}=-\mathbf{x}$, $\overrightarrow{OA}=\mathbf{c}+\mathbf{x}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{c}-\mathbf{x}$,

Имеем:
$$(\mathbf{c}+\mathbf{x})^2+(\mathbf{c}-\mathbf{x})^2 = 2(\mathbf{c}^2+\mathbf{x}^2) = 2(\mathbf{c}^2+R^2).$$

Решение 2. Рассмотрим произвольный диаметр AB, пусть центр окружности — точка O, радиус равен R. Пусть $AM=a$, $BM=b$, $OM=m$. Пусть $\angle MOA=\alpha$, тогда $\angle MOB=\pi-\alpha$. Тогда $a^2=m^2+R^2+2mR\cos\alpha$, $b^2=m^2+R^2-2mR\cos\alpha$, откуда $a^2+b^2=2(m^2+R^2)$ — не зависит от выбора диаметра AB.

4. Доказать, что $(1+\sqrt{3})(1+\sqrt[3]{3})(1+\sqrt[4]{3})\dots(1+\sqrt[11]{3}) > 2013\sqrt[3]{3}$.

Решение. Имеем: $1+\sqrt[n]{3} = 1+3^{\frac{1}{n}} = 1+(3^{\frac{1}{2n}})^2 > 2\cdot 1\cdot 3^{\frac{1}{2n}}$. Поэтому
$$(1+\sqrt{3})(1+\sqrt[3]{3})(1+\sqrt[4]{3})\dots(1+\sqrt[11]{3}) > 2^{10}\cdot 3^{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{22}\right)} > 2^{10}\cdot 3 = 3072 > 2013\cdot\frac{3}{2} > 2013\sqrt[3]{3}.$$

При решении используется неравенство $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{22} > 1$, оно легко проверяется подсчетом.