Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета по предмету «Математика»

10 класс. Краткие решения.

1. Произведение четырех чисел — корней уравнений $x^2+2bx+c=0$ и $x^2+2cx+b=0$, равно 1. Известно, что числа b и c положительны. Найдите их.

Решение. Пусть корни первого уравнения — числа x_1 и x_2, второго — числа x_3 и x_4. По Теореме Виета $1=x_1x_2x_3x_4=bc$. Запишем дискриминанты обоих уравнений: $4b^2-4c\geqslant 0$, $4c^2-4b\geqslant 0$. Следовательно, $b^2\geqslant c=1/b$, но так как $b>0$, то на него можно домножить и получить $b^3\geqslant 1$. Отсюда следует, что $b\geqslant 1$. Аналогично, $c\geqslant 1$. Но раз их произведение равно единице, то $b=c=1$.

2. Два игрока по очереди заменяют один (любой) из коэффициентов $a_7,\ \ldots,\ a_0$ в выражении

$$a_7\cdot 8^7+a_6\cdot 8^6+a_5\cdot 8^5+\ldots+a_2\cdot 8^2+a_1\cdot 8+a_0\cdot 1$$

на $+1$ или -1 (по своему выбору). Докажите, что второй игрок всегда может добиться того, что результат после его последнего хода будет делиться на 13.

Решение. $8^2+1=65$ делится на 13. Второму для победы достаточно разбить все числа на пары: (a_7,a_5), (a_6,a_4), (a_3,a_1) и (a_2,a_0). Теперь, если первый игрок заменяет одно число из какой-то пары, то второй заменяет другое число из этой же пары на то же самое число.

3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{1}}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{2012\cdot\sqrt{2013}+2013\cdot\sqrt{2012}}>0,97$$

Решение. Имеем

$$\frac{1}{(k+1)\cdot\sqrt{k}+k\cdot\sqrt{k+1}}=\frac{(k+1)\cdot\sqrt{k}+k\cdot\sqrt{k+1}}{k(k+1)}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Следовательно, вся сумма равна

$$1-\frac{1}{\sqrt{2013}}>0,97$$

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BK и на сторонах BA и BC взяты соответственно точки M и N так, что $\angle AKM=\angle CKN=\frac{1}{2}\angle ABC$. Докажите, что прямая AC касается окружности, описанной около треугольника MBN.

Решение. Пусть $\angle ABC=2\alpha$, тогда $\angle MKN=\pi-\angle AKM-\angle CKN=\pi-2\alpha$, то есть, $\angle MKN+\angle MBN=\pi$. Следовательно, четырехугольник $MBNK$ — вписанный, то есть, описанная окружность треугольника MBN проходит через точку K. Прямая CK образует с хордой KN угол α, равный вписанному углу, опирающемуся на эту хорду, следовательно, является касательной к окружности в точке K. Аналогично, AK касается этой окружности. Отсюда следует, что AC касается этой окружности в точке K.