

Решения задач. 9 класс.

1. Обозначим числа через x , y и z . Имеем $xy - z = a$, $xz - y = a$, $yz - x = a$. Тогда $xy - z = xz - y$, $xy - z - xz + y = 0$ или $(x + 1)(y - z) = 0$. Поскольку $x > 0$, $x + 1 \neq 0$ и тогда $y - z = 0$, т. е. $y = z$. Совершенно аналогично получаем, что $x = y$. Таким образом, $a = xy - z = x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$.

2. Найдем количество различных вариантов выбора трех наименований книг по алгебре из 6 возможных. В качестве первой книги можно выбрать любую из 6, в качестве второй — любую из 5 оставшихся, а в качестве третьей — любую из четырех оставшихся после выбора первых двух. Таким образом, имеем $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ различных вариантов. Но при этом следует учесть, что варианты выбранных наименований книг A, B, C отличающиеся только порядком, следует считать одинаковыми. Таких вариантов из одного набора можно составить 6: $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$. Итак, на самом деле различных вариантов будет $120 : 6 = 20$. (Для тех, кто знаком с комбинаторикой, может легко подсчитать это число как число сочетаний из шести по три: $C_6^3 = 20$.) Аналогично различных вариантов выбора трех наименований книг по геометрии из пяти будет $5 \cdot 4 \cdot 3 : 6 = 10$. Отсюда следует, что количество различных выборов шести наименований книг указанным образом равно $20 \cdot 10 = 200$. Поскольку число учеников $210 > 200$, то по крайней мере у двоих списки выбранных книг совпадут.

3. Сделаем дополнительное построение. Пусть P — точка, симметричная точке B относительно середины Q стороны AC . Тогда $ABCP$ — параллелограмм.

Рассмотрим треугольник ABP . Докажем, что он равен треугольнику BNL . Действительно, AB и BN имеют одинаковые длины как стороны квадрата $BAMN$. Аналогично одинаковые длины имеют отрезки BC и BL , а AP и BC имеют одинаковые длины как противоположные стороны параллелограмма $ABCP$. Следовательно, длина AP равна длине BL . Осталось показать, что величины углов NBL и BAP равны. Обозначим $\alpha = \angle ABC$. Так как $ABCP$ — параллелограмм, получаем $\angle BAP = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \alpha$. Так как $\angle ABN = \angle CBL = 90^\circ$, имеем $\angle NBL = 360^\circ - \angle ABN - \angle CBL - \angle ABC = 180^\circ - \alpha$. Итак $\angle NBL = \angle BAP$. Следовательно, треугольники ABP и BNL равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда длины третьих сторон в них также совпадают, т. е. длина NL равна длине BP . Остается заметить, что медиана BQ треугольника ABC в два раза короче диагонали BP параллелограмма $ABCP$.

4. Найдем сумму членов S геометрической прогрессии

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3} + \dots + \frac{2^{1000}}{3} = \frac{1}{3}(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{1000}) = \frac{1}{3}(2^{1001} - 1).$$

Обозначим через $\{x\}$ дробную часть числа x : по определению, $\{x\} = x - [x]$, где $[x]$ — целая часть x . Найдем дробные части членов рассматриваемой прогрессии:

$$\left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}, \left\{\frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}, \left\{\frac{2^2}{3}\right\} = \frac{1}{3}, \left\{\frac{2^3}{3}\right\} = \frac{2}{3}, \dots, \left\{\frac{2^{1000}}{3}\right\} = \frac{1}{3}.$$

Тогда сумма дробных частей прогрессии Σ равна

$$\Sigma = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{500 \text{ раз}} = 500\frac{1}{3}.$$