Решения задач. 11 класс.

1. Предположим, что существует $T>0$ такое, что для любого x имеет место равенство $\sin x+\sin\sqrt{2}\,x=\sin(x+T)+\sin\sqrt{2}(x+T)$. Тогда $\sin(x+T)-\sin x+$ $+\sin\sqrt{2}(x+T)-\sin\sqrt{2}\,x=0$ или $2\sin\frac{T}{2}\cos\left(x+\frac{T}{2}\right)+2\sin\frac{\sqrt{2}\,T}{2}\cos\sqrt{2}\left(x+\frac{T}{2}\right)=0$, т. е.

$$\sin\frac{T}{2}\cos\left(x+\frac{T}{2}\right)+\sin\frac{\sqrt{2}\,T}{2}\cos\sqrt{2}\left(x+\frac{T}{2}\right)=0 \qquad (1)$$

для любого x. Пусть $x=-\frac{T}{2}$, тогда

$$\sin\frac{T}{2}+\sin\frac{\sqrt{2}\,T}{2}=0. \qquad (2)$$

Покажем, что $\sin\frac{T}{2}\neq 0$. Действительно, если $\sin\frac{T}{2}=0$, то тогда в силу (2) $\sin\frac{\sqrt{2}T}{2}=0$. Отсюда следует, что $T=2\pi k$ и $\sqrt{2}\,T=2\pi l$, где k, l — целые. Так как $T\neq 0$, получаем, что $k\neq 0$ и $\sqrt{2}=\frac{l}{k}$. Это противоречит тому, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число.

Итак,

$$\sin\frac{T}{2}=-\sin\frac{\sqrt{2}\,T}{2}\neq 0. \qquad (3)$$

Из (1) и (3) следует, что для любого x выполнено равенство $\cos(x+\frac{T}{2})=$ $=\cos\sqrt{2}(x+\frac{T}{2})$ или $\cos t=\cos\sqrt{2}\,t$, $t\in\mathbb{R}$. Но последнее равенство не верно, например, при $t=\frac{\pi}{2}$.

2. Из второго уравнения получаем $2012(x-y)=y^{2011}-x^{2011}$. Покажем, что $x=y$. Действительно, если, к примеру, $x>y$, то тогда $y^{2011}>x^{2011}$ и $y>x$ — противоречие. Итак, $x=y$. Из первого уравнения получаем $2x^{2012}=2$, откуда $x=\pm 1$. Ответ: $x=y=\pm 1$.

3. Обозначим через $|\overrightarrow{v}|$ длину вектора $\overrightarrow{v}$. Для любых двух векторов $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ имеем

$$|\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}|\leq|\overrightarrow{v_1}|+|\overrightarrow{v_2}|. \qquad (*)$$

Это неравенство следует из того, что в треугольнике, построенном с помощью этих векторов при их сложении по правилу треугольника, длина стороны меньше или равна сумме длин двух других. Для любых двух данных векторов $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ имеем $|\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}|\leq 2$. Тогда для любых трех векторов $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ с использованием (*) имеем $2|\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}|=|2\overrightarrow{v_1}+2\overrightarrow{v_2}+2\overrightarrow{v_3}|=|(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})+(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_3})+(\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3})|\leq$ $\leq|\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}|+|\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_3}|+|\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}|\leq 2+2+2=6$, откуда $|\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}|\leq 3$.

4. Имеем $x^{n-1}-1=(x-1)(x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1)$, поэтому

$$n^{n-1}-1=(n-1)(n^{n-2}+n^{n-3}+\ldots+n+1).$$

Для любого натурального k имеем $n^k=(1+(n-1))^k\equiv 1\ (\mathrm{mod}(n-1))$, поэтому

$$n^{n-2}+n^{n-3}+\ldots+1\equiv\underbrace{1+1+\ldots+1}_{(n-1)\text{ раз}}\equiv 0 \pmod{n-1}.$$

Следовательно, число $n^{n-2}+n^{n-3}+\ldots+1$ делится на $(n-1)$, а $n^{n-1}-1$ — на $(n-1)^2$.