Решения задач. 10 класс.

1. Имеем $z-y=ab+ac+db+dc-ab-ad-cb-cd=ac+db-ad-cb=(b-a)(d-c)>0$ как произведение положительных чисел. Поэтому всегда $z>y$.

Далее, $z-x=(d-b)(b+c)$. Поскольку $a+b<a+d$, величина $x=(a+b)(b+c)$ меньше $z=(a+d)(b+c)$, если $b+c>0$. Если $b+c=0$, то $x=z>y$. Если $b+c<0$, то $x>z>y$. Таким образом, по начальным данным нельзя определить, что больше, x или z.

Покажем теперь, что по начальным данным нельзя определить, что больше, x или y. Если все числа a, b, c и d больше нуля, то $0<a+b<a+c$, $0<b+c<b+d$ и $x=(a+b)(b+c)$ меньше $y=(a+c)(b+d)$. Если же среди чисел a, b, c и d есть отрицательные, то возможна ситуация, когда $x>y$. Например, пусть $a=-7$, $b=-1$, $c=2$, $d=3$, тогда $x=-8$, $y=-10$ и $x>y$.

Ответ: $z>y$, а величина x при различных значениях a, b, c и d может быть больше z, меньше y или располагаться между z и y.

2. Пусть радиомачта BC видна из точек E, D и A, расположенных на отрезке AC, перпендикулярном BC, под углами α_1, α_2 и α_3, длины отрезков EC, DC и AC равны 30, 60 и 90 метров. Обозначим длину BC через x. Тогда $\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{x}{30}$, $\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{x}{60}$, $\operatorname{tg}\alpha_3=\frac{x}{90}$. Если $k=\operatorname{tg}\alpha_1$, то $\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{k}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha_3=\frac{k}{3}$. С другой стороны,

$$k=\operatorname{tg}\alpha_1=\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha_2-\alpha_3)=\operatorname{ctg}(\alpha_2+\alpha_3)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha_2+\alpha_3)}=$$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3}{\operatorname{tg}\alpha_2+\operatorname{tg}\alpha_3}=\frac{1-\frac{k}{2}\cdot\frac{k}{3}}{\frac{k}{2}+\frac{k}{3}}=\frac{6-k^2}{5k}.$$

Итак, $k=\frac{6-k^2}{5k}$, откуда $k=1$ и $x=30\operatorname{tg}\alpha_1=30k=30$ метров.

3. Из таблицы следует, что число студентов АБ_1, провалившихся по алгебре и биологии, но сдавших химию равно $\text{АБ}-\text{АБХ}=2-1=1$. Аналогично число студентов АХ_1, провалившихся по алгебре и химии, но сдавших биологию равно $\text{АХ}-\text{АБХ}=6-1=5$, а число БХ_1, провалившихся по биологии и химии, но сдавших алгебру равно $\text{БХ}-\text{АБХ}=3-1=2$. Число студентов А_1, провалившихся по алгебре, но сдавших остальные два экзамена, равно $\text{А}-\text{АБ}_1-\text{АХ}_1-\text{АБХ}=12-1-5-1=5$, точно так же $\text{Б}_1=\text{Б}-\text{АБ}_1-\text{БХ}_1-\text{АБХ}=5-1-2-1=1$, а $\text{Х}_1=\text{Х}-\text{АХ}_1-\text{БХ}_1-\text{АБХ}=8-5-2-1=0$. Таким образом, число проваливших только один экзамен равно $\text{А}_1+\text{Б}_1+\text{Х}_1=5+1+0=6$, два экзамен из трех равно $\text{АБ}_1+\text{АХ}_1+\text{БХ}_1=1+5+2=8$, а все три — $\text{АБХ}=1$. Общее число не сдавших экзамены равно $6+8+1=15$, а сдавших все экзамены равно $41-15=26$.

4. Имеем $x^{n-1}-1=(x-1)(x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1)$, поэтому

$$2012^{2011}-1=2011(2012^{2010}+2012^{2009}+2012^{2008}\ldots+2012+1).$$

Для любого натурального k имеем $2012^k=(1+2011)^k\equiv 1 \pmod{2011}$, откуда

$$2012^{2010}+2012^{2009}+2012^{2008}\ldots+2012+1\equiv\underbrace{1+1+\ldots+1}_{2011\text{ раз}}\equiv 0 \pmod{2011}.$$

Следовательно, число $2012^{2010}+2012^{2009}+2012^{2008}\ldots+2012+1$ делится на 2011, а $2012^{2011}-1$ — на 2011^2.