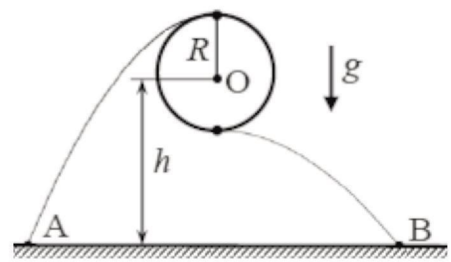
9 класс

1. Грузик, привязанный к невесомой нерастяжимой нити, вращается в вертикальной плоскости вокруг точки О по окружности радиуса R. Если нить перерезать в момент, когда грузик находится в верхней или нижней точке окружности, он упадёт на землю в точке А или В, соответственно (см. рис.). Найти расстояние АВ, если известно, что точки А и В равноудалены от точки О, которая находится на высоте h над поверхностью земли.



Решение.

Пусть расстояние |AB| равно L. Обозначим скорость грузика в верхней точке v_1, а время его падения из этой точки на землю t_1. При падении грузика его движение по горизонтали – равномерное со скоростью v_1, а по вертикали – равноускоренное с ускорением g и нулевой начальной скоростью.

Поэтому

$$v_1 t_1 = \frac{L}{2}, \qquad \textbf{(1 б.)}$$

$$\frac{gt^2}{2} = h + R. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Отсюда получим:

$$v_1^2 = \frac{L^2}{4}\frac{g}{2(h+R)}. \qquad (1)$$

Для падения грузика из нижней точки аналогично получим

$$v_2^2 = \frac{L^2}{4}\frac{g}{2(h-R)}, \qquad (2) \qquad \textbf{(3 б.)}$$

где скорость v_2 грузика в нижней точке связана со скоростью v_1 законом сохранения энергии:

$$mg(2R) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$ **(2 б.)**

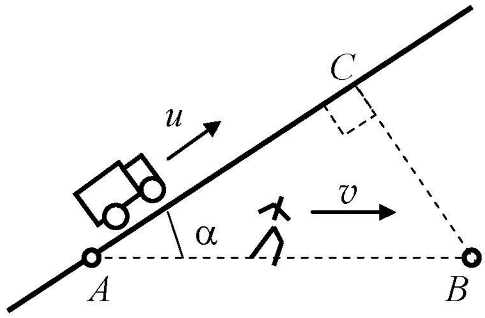
где m — масса грузика. Подставляя сюда (1) и (2), получим

$$2R = \frac{L^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{h-R} - \frac{1}{h+R} \right) = \frac{L^2}{16} \cdot \frac{2R}{h^2 - R^2}.$$

Выразив отсюда L, получим

ответ: $L = 4\sqrt{h^2 - R^2}$. **(2 б.)**

2. Ленивый мальчик Вова живет в деревне A, а ходит в школу, расположенную в пункте B (см. рис.) Мимо его деревни проходит прямое шоссе, расположенное под углом α к отрезку AB. Чтобы дойти до школы пешком по прямой, ему нужно затратить время τ, но Вова не ходит пешком - он ловит автомобиль, который едет по шоссе, и останавливает его так, чтобы максимально сократить свой пеший маршрут. Сколько времени он тратит на дорогу, если пешком он передвигается со скоростью v, а скорость автомобиля u.



Решение.

Чтобы максимально сократить свой пеший маршрут Вове нужно остановить автомобиль в точке C, лежащей на перпендикуляре к шоссе, проведённом из точки A. Действительно, при выборе на шоссе любой другой точки C' пеший путь увеличивается, так как гипотенуза $C'B$ прямоугольного треугольника BCC' больше катета CB. **(3 б.)**

Тогда участок пути AC Вова проезжает на машине за время:

$$t_1 = \frac{AC}{u}. \quad (1)$$ **(1 б.)**

Участок CB Вова проходит пешком и тратит время:

$$t_2 = \frac{CB}{v}. \quad (2)$$ **(1 б.)**

Полное время, потраченное Вовой до школы равно $t = t_1 + t_2$. **(1 б.)**

По условию задачи, участок пути AB Вова проходит пешком за время τ, поэтому

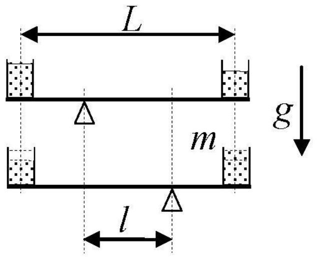
$$AB = v\tau. \quad (3)$$ **(1 б.)**

Учитывая, что $AC = AB\cos\alpha$ и $CB = AB\sin\alpha$, **(1 б.)**

из (1) и (2) с помощью (3) получим

ответ: $t = \tau\left(\sin\alpha + \frac{v}{u}\cos\alpha\right)$. **(2 б.)**

3. Два стакана с различным количеством воды уравновешены на разноплечих рычажных весах. Расстояние между центрами стаканов равно L. Часть воды массы m перелили из одного стакана в другой. Оказалось, что если при этом опору весов сдвинуть на расстояние l, то весы снова придут в равновесие. Найти массу M всей воды в обоих стаканах. Массой самих весов и стаканов пренебречь.



Решение.

Обозначим в начальном состоянии массу воды в стаканах — m_1 и m_2, а соответствующие плечи весов — l_1 и l_2. Условие равновесия весов в начальном состоянии имеет вид:

$$m_1 l_1 = m_2 l_2. \qquad (1) \qquad \textbf{(3 б)}$$

После перелива воды аналогичное условие равновесия запишется в виде:

$$(m_1 - m)(l_1 + l) = (m_2 + m)(l_2 - l). \qquad (2) \qquad \textbf{(4 б)}$$

Вычтя из уравнения (2) уравнение (1), получим:

$$m_1 l - m(l_1 + l) = -m_2 l + m(l_2 - l) \text{ или } (m_1 + m_2) l = m(l_1 + l_2).$$

Подставив сюда $$L = l_1 + l_2, \qquad \textbf{(1 б)}$$

найдём **ответ:** $M = m_1 + m_2 = \frac{L}{l} m$. **(2 б)**

4. Однородную проволоку с сопротивлением $3R$ разрезали на три равные части. Перечислить значения сопротивлений, которые можно получить, соединяя эти части. Соединять между собой и с измерительными клеммами можно только концы проволок.

Решение.

Сопротивление каждой из частей проволоки равно

R **(3 б.)**

(либо $9R$, если проволоку разрезали вдоль).

Собранная схема может состоять из: а) 1, б) 2 или в) 3 кусков проволоки.

В случае а) полученное сопротивление, очевидно равно

R **(1 б.)**

В случае б) куски можно соединять последовательно и параллельно. Полученные значения сопротивлений будут, соответственно, равны

$2R$ **(1 б.)**

и

$R/2$ **(1 б.)**

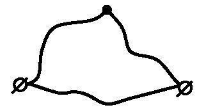
В случае в) куски можно соединить последовательно, получив сопротивление

$3R$ **(1 б.)**

и параллельно, получив сопротивление

$R/3$ **(1 б.)**

а также собрать две схемы:

1)  2) 

Получив сопротивления, соответственно

$3R/2$ **(1 б.)**

и

$2R/3$ **(1 б.)**

Таким образом, значения сопротивлений, которые можно получить, равны:

$$R/3, \quad R/2, \quad 2R/3, \quad R, \quad 3R/2, \quad 2R, \quad 3R.$$

Для случая проволоки, разрезанной вдоль, эти значения нужно умножить на 9.