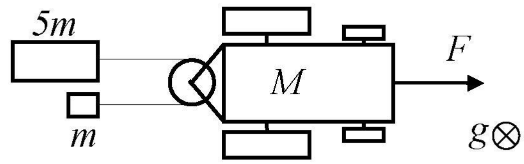
11 класс



1. Два бруска массы m и $5m$, связанные тонкой лёгкой нитью, покоятся на столе. Нить слегка натянута и перекинута через лёгкий блок, закреплённый сзади у игрушечного трактора массы M (на рисунке вид сверху). Трактор снабжён колёсами, поэтому силой трения между ним и полом можно пренебречь. Коэффициент трения между брусками и полом равен μ. Какую минимальную горизонтальную силу F_1 надо приложить к трактору, чтобы он мог двигаться? При какой минимальной горизонтальной силе F_2 будут двигаться оба бруска? Ускорение свободного падения g.

Решение.

Трактор начнёт двигаться, когда начнёт двигаться маленький брусок, а большой брусок будет всё ещё стоять на месте. Учитывая, что $F_{тр}=\mu N$, а $N=mg$ **(1 б.)**, запишем второй закон Ньютона для трактора и маленького бруска:

$$\begin{cases} F_1 - 2T = 0 \\ T - \mu mg = 0 \end{cases}, \qquad (1)$$ **(1 б.)**

где T — сила натяжения нити. Решая (1), найдём: $F_1 = 2\mu mg$ **(1 б.)**.

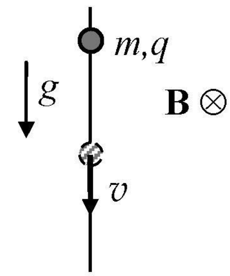
Запишем второй закон Ньютона для трактора, маленького бруска и большого бруска в момент, когда начнут двигаться оба бруска:

$$\begin{cases} F_2 - 2T = Ma_1 \\ T - \mu mg = ma_2 \\ T - 5\mu mg = 0 \end{cases}. \qquad (2)$$ **(4 б.)**

Решая (2), и учитывая, что $a_2=2a_1$ **(2 б.)**, получим: $F_2=2\ \mu g(5m+M)$ **(1 б.)**.

Ответ: $F_1=2\mu mg$; $F_2=2\ \mu g(5m+M)$.

2. На длинную вертикальную спицу надета бусинка массы m и зарядом q. Перпендикулярно спице приложено магнитное поле индукции B. Если бусинку отпустить, то падая вниз, она через какое-то время приобретает постоянную скорость v. Найдите коэффициент трения между бусинкой и спицей.



Решение:

На бусинку действуют в горизонтальном направлении сила Лоренца $F_л$ и сила реакции со стороны спицы N, а в вертикальном — сила тяжести mg и сила трения μN. Горизонтальная скорость бусинки равна 0 и не меняется, следовательно, сумма всех сил, действующих на бусинку в проекции на горизонтальную ось, равна нулю:

$$F_л - N = 0, \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где сила Лоренца

$$F_л = qvB. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Запишем сумму всех сил, действующих на бусинку в проекции на вертикальную ось:

$$mg - \mu N = ma.$$

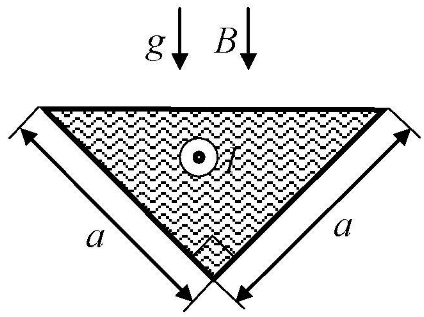
По мере увеличения скорости бусинки, сила Лоренца увеличивается, а вместе с ней, согласно (1), увеличивается сила реакции N и сила трения μN. Когда сила тяжести и сила трения сравняются, ускорение станет равным нулю, и скорость перестанет увеличиваться, а значит и баланс сил в дальнейшем не изменится:

$$mg - \mu N = 0, \qquad (2) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Подставляя (2) в (1) и выражая μ, получим:

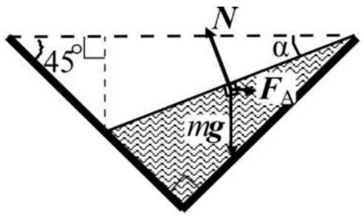
$$\textbf{ответ: } \mu = \frac{mg}{qvB}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

3. Длинная непроводящая кювета с сечением в виде равнобедренного прямоугольного треугольника размером $a \times a$ (см. рис.) доверху заполнена жидким металлом плотностью ρ. Кювета помещена в вертикальное магнитное поле индукции B. После того, как, медленно увеличивая, в кювете создали продольный ток I, часть металла вылилась через ее борт. Определите, какая часть металла осталась. Какой наибольший продольный ток можно длительно пропускать через кювету?



Решение:

Выберем в поверхностном слое жидкого металла трубку малого сечения ΔS. Через эту трубку протекает ток $I\dfrac{\Delta S}{S}$, где S — сечение *оставшейся* части жидкости. На эту трубку действуют: по вертикали — сила тяжести



$$mg = \rho \Delta V g = \rho \Delta S l\, g\,, \qquad (1) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

где l — длина трубки (кюветы); по горизонтали — сила Ампера

$$F_{\text{A}} = I\frac{\Delta S}{S} lB\,; \qquad (2) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

а также сила со стороны жидкости (сила Архимеда), перпендикулярная поверхности жидкости. Так как трубка покоится, сумма этих сил равна нулю. Запишем это условие в проекции на ось, параллельную поверхности жидкости:

$$mg \sin\alpha = F_{\text{A}} \cos\alpha\,, \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где α – угол наклона поверхности жидкости к горизонтали. Подставив сюда (1) и (2), получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{I\dfrac{\Delta S}{S} lB}{\rho g \Delta S l} = \frac{IB}{\rho g S} = \frac{2IB}{\rho g a x}\,, \qquad \textbf{(1 б.)}$$

где x — высота жидкости у вертикального бортика кюветы. Введя обозначение $I_0 = \dfrac{\rho g a^2}{2B}$, перепишем последнее уравнение в виде:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{I}{I_0}\frac{a}{x}\,.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a-x}{a+x}\,. \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Объединив последние два уравнения, получим:

$$\left(\frac{a-x}{a+x}\right)\frac{x}{a} = \frac{I}{I_0}\,. \qquad (3) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Найдя отсюда долю оставшейся жидкости x/a, получим

$$\textbf{ответ:}\quad \frac{x}{a} = \frac{1 - I/I_0 + \sqrt{(I/I_0)^2 - 6I/I_0 + 1}}{2}. \qquad (4) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

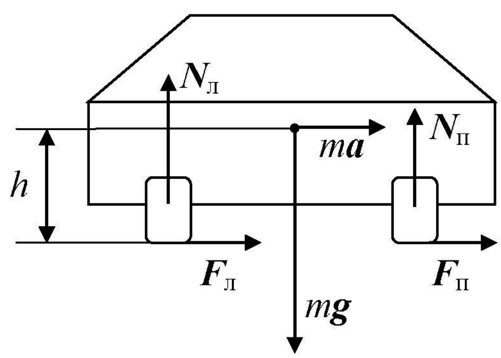
Второе решение $\frac{x}{a} = \frac{1 - I/I_0 - \sqrt{(I/I_0)^2 - 6I/I_0 + 1}}{2}$ не подходит, так как оно либо отвечает увеличению количества жидкости с увеличением I, либо не имеет действительного корня.

Максимально возможный ток найдем из уравнения (3)

$$\textbf{ответ}\quad I_{\max} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 I_0 = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 \frac{\rho g a^2}{2B}, \qquad \textbf{(2 б.)}$$

4. Оценить разницу сил давлений на левые и правые пары колес автомобиля при повороте на перекрестке. Предполагается, что Вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения задачи величины, выбрать их числовые значения и получить численный результат.

Решение:



Для определенности рассмотрим поворот направо. На автомобиль действуют следующие силы: сила тяжести mg, силы реакции со стороны левых и правых пар колёс $N_Л$ и $N_П$, а также силы трения $F_Л$ и $F_П$. При движении по окружности возникает центростремительное ускорение:

$$a = \frac{v^2}{R}. \qquad (1) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Запишем 2-й закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось, перпендикулярную скорости:

$$F_Л + F_П = ma, \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Поскольку при повороте автомобиль не переворачивается, действующий на него момент сил равен нулю. Запишем это условие, рассчитывая моменты сил относительно центра масс:

$$(N_П - N_Л)\frac{w}{2} + (F_Л + F_П)h = 0, \qquad (3) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

где w — расстояние между левой и правой парой колёс, а h — высота центра масс автомобиля.

Подставив (1) в (2), а полученный результат в (3), найдём:

$$N_{\text{л}} - N_{\text{п}} = \frac{2mv^2h}{Rw}. \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Приняв $m \approx 1500$ кг, $v \approx 20$ км/ч ≈ 5 м/с, $R \approx 5$ м, $h \approx 0{,}5$ м, $w \approx 1{,}5$ м, получим

ответ: $$N_{\text{л}} - N_{\text{п}} = \frac{2 \cdot 1500 \cdot 25 \cdot 0{,}5}{5 \cdot 1{,}5} \approx 5000\ \text{Н}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$