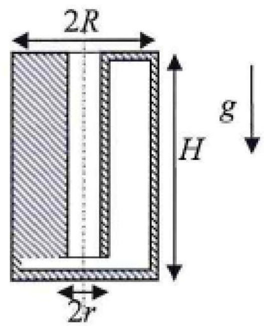
10 класс



1. Чернильница представляет собой фигуру вращения, сечение которой изображено на рисунке. Какой объем чернил можно в неё налить? Радиусы внешней и внутренней цилиндрических поверхностей равны R и r соответственно. Чернильница стоит вертикально, наполняют её медленно. Плотность чернил ρ, ускорение свободного падения g атмосферное давление P_0, высота чернильницы H. Зазор снизу между дном и внутренним цилиндром незначительный. Толщиной стенок пренебречь.

Решение.

Так как чернила наливают медленно, то температуру воздуха в чернильнице можно считать постоянной. Когда начинают наливать чернила, воздух в промежутке между цилиндрами начинает сжиматься, а его давление увеличиваться в соответствии с законом Бойля — Мариотта:

$$P_0HS = P(H-h)S, \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где $S = \pi(R^2 - r^2)$, h — высота столба жидкости, находящейся между цилиндрами, а P — давление воздуха, находящегося между цилиндрами после того, как налили чернила. Это давление уравновешивается столбом жидкости, находящейся во внутреннем цилиндре:

$$P = P_0 + \rho g(H-h). \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Сравнивая (1) и (2), найдём:

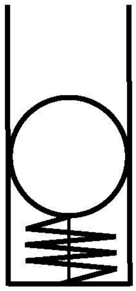
$$P_0\frac{H}{(H-h)} = \rho g(H-h) + P_0. \qquad (3) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Решая (3) относительно h найдём:

$$h = H + \frac{P_0}{2\rho g} \pm \sqrt{\frac{P_0}{\rho g}(H + \frac{P_0}{4\rho g})}. \quad (4) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Учитывая, что $h < H$, выбираем знак "–". Теперь, вычислив объём, получим **ответ**: $V = \pi r^2 H + \pi\left(R^2 - r^2\right)\left(H + \frac{P_0}{2\rho g} - \sqrt{\frac{P_0}{\rho g}\left(H + \frac{P_0}{4\rho g}\right)}\right)$. **(2 б.)**

2. В вертикально расположенном пружинном пистолете шарик массы m лежит на предварительно сжатой на Δx_0 пружине жесткости k. Пружину удерживает в сжатом состоянии натянутая нить. В некоторый момент нить пережигают. Определить максимальную скорость шарика в стволе. Ускорение свободного падения g, массой пружины пренебречь, трения нет. Ствол достаточно длинный, так что шарик из него не вылетает.



Решение:

1-й способ.

Вертикальную координату x центра шарика будем отсчитывать от его первоначального положения. До достижения максимальной скорости шарик не отрывается от пружины (иначе его скорость начнёт падать из-за действия силы тяжести), поэтому растяжение пружины

$$\Delta x = \Delta x_0 - x. \quad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$k\frac{\Delta x_0^2}{2} = k\frac{\Delta x^2}{2} + mgx + \frac{mv^2}{2}. \qquad \textbf{(3 б.)}$$

Подставив сюда (1), найдём:

$$\frac{mv^2}{2} = -k\frac{x^2}{2} + (k\Delta x_0 - mg)x. \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Максимальное значение скорости соответствует максимальному значению выражения в правой части равенства, которое достигается при

$$x = \frac{k\Delta x_0 - mg}{k}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

и равно

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{\left(k\Delta x_0 - mg\right)^2}{2k}.$$

Отсюда находим

ответ: $v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}}\left(\Delta x_0 - \frac{mg}{k}\right)$. **(2 б.)**

2-й способ.

Максимальность скорости шарика означает, что его ускорение в этот момент равно нулю, а значит, сила, действующая на него со стороны пружины $k\Delta x$ равна силе тяжести:

$$k\Delta x = mg. \qquad \textbf{(4 б.)}$$

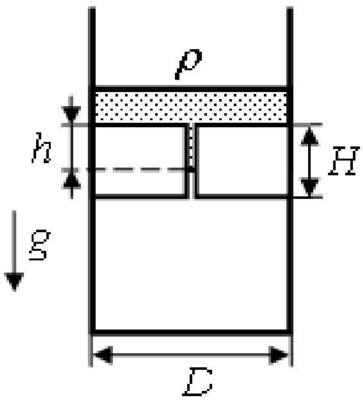
К этому моменту шарик поднимется на высоту (Δx_0–Δx) и закон сохранения энергии запишется в виде:

$$k\frac{\Delta x_0^2}{2} = k\frac{\Delta x^2}{2} + mg(\Delta x_0 - \Delta x) + \frac{mv^2}{2}. \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Подставив сюда Δx из предыдущего уравнения, получим

$$\textbf{ответ: } v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}}\left(\Delta x_0 - \frac{mg}{k}\right). \qquad \textbf{(2 б.)}$$

3. Цилиндрический сосуд с диаметром D закрыт подвижным поршнем высоты H. В пробке имеется небольшое отверстие. Отверстие закрыто столбом жидкости высоты h. Плотность жидкости ρ. Определите массу поршня.



Решение:

Разность между давлениям газа под поршнем и давлением жидкости на уровне A равно давлению столбика жидкости высотой h:

$$\Delta P = \rho g h. \qquad (1) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Разность соответствующих сил давления, действующих на поршень, равна $\Delta P \cdot \pi(D/2)^2$ и, поскольку поршень покоится, равна действующей на него силе тяжести:

$$\Delta P \cdot \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = mg, \qquad (2) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

где m — искомая масса поршня.

Подставив (1) в (2), получим

$$\textbf{ответ: } m = \frac{\pi}{4}\rho h D^2. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

4. Для получения информации о планете космонавты с её поверхности из катапульты запускают измерительный зонд. Однако парашют не срабатывает, и зонд в итоге разбивается. При анализе данных оказалось, что уцелели лишь результаты трёх последовательных сделанных через одинаковые интервалы Δt, измерений абсолютной величины скорости зонда, начиная с v, причём каждое последующее значение ровно в 2 раза меньше предыдущего. Найти по этим данным ускорение свободного падения на планете. Атмосферы на планете нет, ускорение свободного падения принять постоянным и направленным вертикально вниз.

Решение.

По условию задачи, в три последовательных момента времени абсолютные скорости зонда равны, соответственно: v, $v/2$ и $v/4$.

Поскольку зонд движется вниз с ускорением свободного падения g, вертикальная компонента его скорости в эти три момента времени равна:

$$v_{y1}; \quad v_{y1} - g\Delta t; \quad v_{y1} - 2g\Delta t, \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где v_{y1} — y - компонента скорости в первом измерении. Поскольку на зонд не действуют силы в горизонтальном направлении, проекция его скорости на это направление сохраняется. Обозначим её v_x. Запишем теорему Пифагора, связывающую квадрат модуля скорости с суммой квадратов проекций:

$$v_x^2 + v_{y1}^2 = v^2, \qquad (1)$$

$$v_x^2 + (v_{y1} - g\Delta t)^2 = \left(\frac{v}{2}\right)^2, \qquad (2) \qquad \textbf{(5 б.)}$$

$$v_x^2 + (v_{y1} - 2g\Delta t)^2 = \left(\frac{v}{4}\right)^2. \qquad (3)$$

Вычтем из уравнения (1) уравнение (2):

$$g\Delta t(2v_{y1} - g\Delta t) = \frac{3}{4}v^2, \qquad (4)$$

Вычтем теперь из уравнения (1) уравнение (3):

$$2g\Delta t(2v_{y1} - 2g\Delta t) = \frac{15}{16}v^2, \qquad (5)$$

Теперь вычтем из уравнения (4) уравнение (5), делённое на 2:

$$(g\Delta t)^2 = \frac{9}{32}v^2.$$

Отсюда находим

ответ: $g = \dfrac{3}{4\sqrt{2}}\dfrac{v}{\Delta t}.$ **(3 б.)**