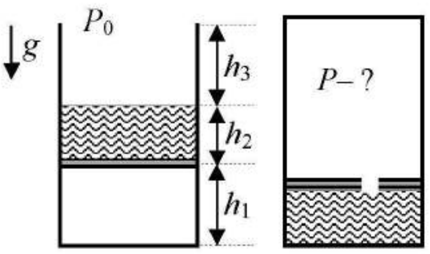
Физика 11 класс

1. В цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находится воздух. На поршень налита вода плотностью ρ слоем высотой h_2. В равновесии высота поршня над дном сосуда равна h_1. Цилиндр закрывают герметичной крышкой, расположенной на высоте h_3 над поверхностью воды. Через некоторое время поршень прохудился, и вся вода оказалась внизу. Чему равно давление воздуха в сосуде? Атмосферное давление равно P_0, ускорение свободного падения равно g, трения нет. Температура постоянна.



Решение.

До того, как поршень прохудился, давление воздуха над слоем воды было равно P_0, а давление воздуха под поршнем (обозначим его P_1) было равно

$$P_1 = P_0 + \rho g h_2. \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Пусть ν_1 и ν_3 — количества воздуха в молях под и над поршнем, соответственно; S — площадь сечения сосуда; R — газовая постоянная; T — температура. Тогда, согласно уравнению Клапейрона—Менделеева,

$$P_1\, h_1\, S = \nu_1\, R\, T, \qquad P_0\, h_3\, S = \nu_3\, R\, T. \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

После того, как поршень прохудился и вся вода оказалась внизу, $(\nu_1 + \nu_3)$ молей воздуха занимают объём $(h_1 + h_3)\, S$, откуда

$$P\,(h_1 + h_3)\, S = (\nu_1 + \nu_3)\, R\, T, \qquad (3) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где P — искомое давление воздуха в сосуде. Из (2) и (3) находим:

$$P_1\, h_1 + P_0\, h_3 = P\,(h_1 + h_3). \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Подставив значение P_1 из (1) и решив полученное уравнение относительно P, найдём

ответ: $P = P_0 + \dfrac{\rho g h_1 h_2}{h_1 + h_3}$. **(2 б.)**

2. Два одинаковых шарика массы m каждый соединены непроводящей пружинкой жёсткости $\varkappa$. В начальном положении шарики неподвижны, пружинка не растянута, а её длина — l. Шарики зарядили одинаковыми зарядами q, и они начали разлетаться в разные стороны. При какой минимальной величине q пружинка порвётся, если известно, что она выдерживает максимальную силу F?

Решение.

В тот момент, когда натяжение пружины достигнет величины F, шарики остановятся. **(2 б.)**

(Если бы они не остановились, то q не было бы минимальной величиной заряда, при которой пружина рвётся.) Поэтому кинетическая энергия системы в момент разрыва пружины равна нулю (так же, как и в начальный момент времени). Таким образом, энергия кулоновского отталкивания шариков в начальный момент времени kq^2/l (где k — коэффициент пропорциональности в законе Кулона) равна сумме энергии кулоновского отталкивания в момент разрыва пружины kq^2/l_1 (где l_1 — длина пружины, при которой она рвётся) и потенциальной энергии пружины $E_{\text{пруж}}$ в этот момент:

$$k\frac{q^2}{l} = k\frac{q^2}{l_1} + E_{\text{пруж}}. \quad (1)$$ **(2 б.)**

Из закона Гука найдём длину l_1:

$$l_1 = l + F/\varkappa, \quad (2)$$ **(2 б.)**

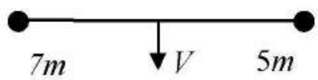
откуда

$$E_{\text{пруж}} = \varkappa\frac{(l_1 - l)^2}{2} = \frac{F^2}{2\varkappa}. \quad (3)$$ **(2 б.)**

Подставив в равенство (1) l_1 из (2) и $E_{\text{пруж}}$ из (3) и выразив q из полученного уравнения, найдём

ответ: $q = \sqrt{\dfrac{Fl\left(l + F/\varkappa\right)}{2k}}$ **(2 б.)**

3. На гладкой горизонтальной плоскости неподвижно лежат два маленьких шарика. Они соединены невесомой нерастяжимой нитью, которая вначале распрямлена (см. вид сверху на рисунке). Центр нити начинают перемещать вдоль плоскости с некоторой постоянной скоростью, направленной перпендикулярно начальной ориентации нити. Шарики сталкиваются первый раз под углом к начальной ориентации нити, равным, очевидно, 90°. Под каким углом к начальной ориентации нити они столкнутся во второй раз, если их массы равны $7m$ и $5m$, а столкновения абсолютно упругие?



Решение.

Движение шариков удобно рассматривать в системе отсчёта, движущейся с постоянной скоростью V вместе с центром нити. В этой системе шарики до столкновения движутся навстречу друг другу по окружности с одинаковыми скоростями, равными V. Пусть ось x направлена по горизонтали, слева направо на рисунке. Тогда, в движущейся системе отсчёта, скорости обоих шариков непосредственно перед первым ударом равны V и направлены вдоль оси x навстречу друг другу. **(1 б.)**

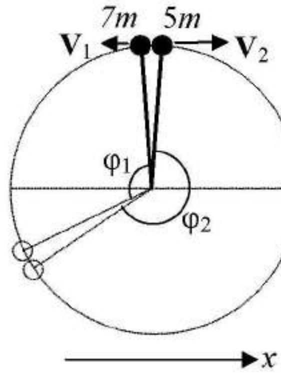
Найдём скорости шариков V_1 и V_2 (в проекции на ось x) непосредственно после первого удара. Сделать это можно разными способами. Один способ заключается в том, чтобы записать законы сохранения импульса и энергии при упругом столкновении:

$$7mV_1 + 5mV_2 = 7mV - 5mV,$$

$$7mV_1^2/2 + 5mV_2^2/2 = 7mV^2/2 + 5mV^2/2,$$

и найти V_1 и V_2 из этой системы двух уравнений. В результате получим $V_1 = -2V/3$ и $V_2 = 4V/3$.

Второй способ состоит в переходе в систему центра масс двух шариков, которая движется со скоростью $V_{\text{цм}} = (7mV - 5mV) / (7m + 5m) = V/6$ вдоль оси x. Проекции скоростей левого и правого шариков на ось x в системе центра масс равны $V - V_{\text{цм}} = 5V/6$ и $(-V) - V_{\text{цм}} = -7V/6$, соответственно. После столкновения скорости шариков в системе центра масс остаются такими же по величине, но меняют направление на противоположное. Следовательно, x-проекции скоростей *после столкновения* в системе центра масс равны $-5V/6$ и $7V/6$. Наконец, возвращаясь из системы центра масс, получим $V_1 = -5V/6 + V_{\text{цм}} = -2V/3$ и $V_2 = 7V/6 + V_{\text{цм}} = 4V/3$.



Итак, в системе отсчёта центра нити, шарики после первого соударения разлетаются в противоположных направлениях вдоль оси x со скоростями

$$|V_1| = 2V/3 \text{ и } |V_2| = 4V/3. \quad (1)$$ **(4 б.)**

Обозначим φ_1 и φ_2 углы, на которые повернутся половинки нити, прикреплённые к правому и левому шарикам, между первым и вторым столкновениями (см. рисунок). Так как шарики движутся равномерно по окружности относительно центра нити, то

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{|V_1|}{|V_2|}, \quad (2)$$ **(2 б.)**

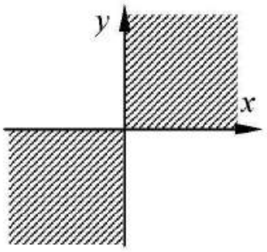
причём

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 360°. \quad (3)$$ **(1 б.)**

Из равенств (1), (2), (3) находим $\varphi_1 = 120°$. Следовательно, второе столкновение произойдёт под углом $\varphi_1 - 90° = 30°$ к первоначальной ориентации нити.

Ответ: 30°, или $\pi/6$ радиан. **(2 б.)**

4. В двух противоположных квадрантах плоскости XY (заштрихованы на рисунке) имеется однородное магнитное поле индукции B, направленное вдоль оси z. Частицу с зарядом e и массой m запустили так, что она движется в плоскости XY по замкнутой траектории. Найдите период движения частицы по этой траектории.



Решение.

На тех участках траектории, где нет магнитного поля, частица движется прямолинейно и равномерно. Там, где имеется однородное магнитное поле (заштрихованные области), частица движется по окружности с постоянной скоростью. **(2 б.)**

Так как скорость частицы постоянна, то искомый период T равен

$$T = \frac{L}{v}\,, \qquad (1)$$

где L — длина замкнутой траектории, v — скорость частицы. Чтобы найти L, вычислим сначала радиус круговых участков траектории R. Для этого воспользуемся 2-м законом Ньютона $F = ma$, где $F = evB$ — сила Лоренца, $a = v^2/R$ — ускорение при равномерном движении по кругу:

$$evB = m\frac{v^2}{R},$$

откуда

$$R = \frac{mv}{eB}\,. \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Если траектория частицы не выходит за пределы одного заштрихованного квадранта, то это окружность радиуса R. В этом случае $L = 2\pi R$, откуда с учётом (1) и (2) получим $T = 2\pi m/eB$.

Если же частица движется из одного заштрихованного квадранта в другой и обратно, то её траектория состоит из двух дуг окружностей радиуса R и двух соединяющих их прямолинейных участков. Такая траектория имеет вид «стадиона» (рис. 1). **(2 б.)**

Точки A, B, C, D, где прямолинейные участки смыкаются с круговыми, образуют прямоугольник, причём отрезки BC и AD являются диаметрами круговых отрезков: |BC| = |AD| = $2R$. Точки A, B, C, D должны находиться на границах заштрихованных квадрантов. Это можно осуществить только способом, показанным на рис. 2, когда прямоугольник ABCD оказывается квадратом, повёрнутым на 45° относительно координатных осей. Следовательно, |AB| = |BC| = |CD| = |AD| = $2R$. В этом случае траектория частицы состоит из двух отрезков AB и CD длиной $2R$ каждый, и двух полуокружностей длиной πR каждая. Таким образом,

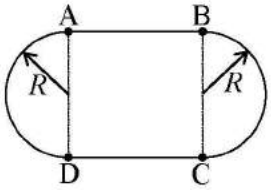


Рис. 1

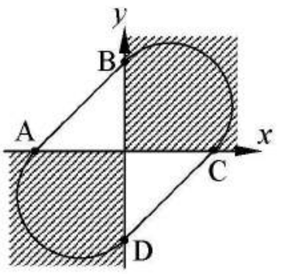


Рис. 2

$$L = 2R + 2R + \pi R + \pi R = 2(\pi + 2)R\,. \qquad (3) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Из (1), (2) и (3) получим период движения по траектории типа «стадион»: $T = 2(\pi+2)m/eB$.

Ответ: $\dfrac{2\pi m}{eB}$ или $\dfrac{2(\pi+2)m}{eB}$. **(1 б. + 1 б.)**

5. Оцените, какое максимальное статическое напряжение относительно земли может быть на человеке, окружённом заземлёнными предметами (деревьями, бетонными стенами, батареями отопления и т.д.), если известно, что электрическая прочность воздуха на пробой E = 30 кВ/см. *Предполагается, что Вы хорошо представляете явление, можете сами задать недостающие в условии задачи величины, выбрать их численные значения и получить численный результат.*

Решение.

Рассмотрим сначала упрощённую задачу: до какого максимального напряжения можно зарядить (в тех же условиях) проводящий шар радиуса R? Напряжение U шара относительно земли равно разности потенциалов шара ($\varphi_ш$) и земли ($\varphi_з = 0$):

$$U = \varphi_ш - \varphi_з = k\frac{Q}{R} - 0 = k\frac{Q}{R}, \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где Q — заряд шара. Электрическое поле E имеет наибольшую величину вблизи шара, где оно равно

$$E = k\frac{Q}{R^2}. \qquad (2) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Зная максимально возможное значение напряжённости поля E_{max} = 30 кВ/см, находим из (1) и (2), что максимально возможное напряжение на шаре U_{max} равно

$$U_{max} = E_{max}R. \qquad (3) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Если попытаться зарядить шар до напряжения, большего, чем U_{max} , то заряд с него будет стекать через воздух.

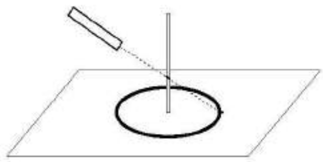
Чем меньше R, тем меньше максимально возможное напряжение. Поэтому при зарядке проводника сложной формы (тело человека) заряд начнёт стекать в первую очередь с тех участков, где радиус кривизны наименьший (как известно, заряд стекает с острия). Таким образом, в формулу (3) надо подставить наименьший радиус кривизны тела. **(2 б.)**

У тела человека наименьший радиус кривизны — порядка 0,7 см (концы пальцев). **(1 б.)**

Подставляя $R \approx 0{,}7$ см и E_{max} = 30 кВ/см в (3), найдём

ответ: ≈ 20 кВ. **(2 б.)**

6. *Задача-демонстрация (демонстрируется видеоролик).* Луч лазерной указки направлен под углом к горизонтальной поверхности стола. Если на пути лазерного луча разместить тонкий вертикальный металлический стержень круглого сечения, на столе образуется светящаяся окружность с центром в месте нахождения стержня. Если заменить стержень круглого сечения на вертикальный стержень с неправильной (не круглой) формой сечения, светящаяся линия на столе всё равно имеет форму окружности. Объясните наблюдаемое явление.



Решение.

В этой задаче нужно объяснить:

1) почему отражённые лучи образуют на столе замкнутую линию, обходящую вокруг стержня;

2) почему эта линия представляет собой окружность (даже при неправильной форме сечения стержня), центром которой является нижний край стержня.

1. Чтобы ответить на первый вопрос, рассмотрим ход лучей в проекции на плоскость стола («вид сверху», см. рис. 1). Лучи, попадающие на стержень в точках A, B, C, D, E, F, после отражения достигают поверхность стола в точках A', B', C', D', E', F', соответственно. Лучи, падающие на левую (правую) половину стержня, отражаются влево (вправо). Видно, что при движении падающего луча слева направо (от A до F) отражённый луч плавно поворачивается на 360° (в проекции сверху) от AA' до FF'. Поэтому точка падения луча на стол описывает непрерывную, почти замкнутую кривую A' B' C' D' E' F' (небольшой разрыв между A' и F' — это тень от стержня). В условиях данного опыта ширина лазерного луча больше ширины стержня, т. е. все точки A, B, C, D, E, F освещены одновременно. Поэтому вся кривая A' B' C' D' E' F' видна одновременно как светящаяся, практически замкнутая линия. **(4 б.)**

2. Лучи лазерной указки, падая на стержень по линии AO (рис. 2), отражаются от разных точек стержня, в результате чего возникает набор отражённых лучей OB, OB', OB'' и т. д. Покажем, что все эти отражённые лучи распространяются под одним и тем же углом к вертикали ON:

$$\angle BON = \angle B'ON = \angle B''ON = \ldots = \angle AOM . \qquad (1)$$

(Подчеркнём, что это утверждение *отличается* от утверждения «угол падения равен углу отражения», так как углы между вертикалью и направлениями лучей — это не то же самое, что углы падения и отражения.)

Проще всего убедиться в верности равенства (1) из соображений симметрии. Операция зеркального отражения относительно плоскости α, касательной к стержню, переводит продолжение падающего луча OB_1 в отражённый луч OB (рис. 3). Эта же операция оставляет вертикальную линию ON неизменной (так как эта линия принадлежит плоскости α). Поэтому угол B_1ON переходит при зеркальном отражении в угол BON, а значит, $\angle B_1ON = \angle BON$ (при зеркальном отражении расстояния и углы не изменяются). С другой стороны, $\angle B_1ON = \angle AOM$, т. к. это вертикальные углы. Следовательно, $\angle BON = \angle AOM$. Эти же рассуждения верны для углов B'ON, B''ON и т. д., откуда и следует равенство (1).

Из (1) следует, что прямоугольные треугольники BON, B'ON, B''ON и т. д. равны друг другу, откуда

$$|BN| = |B'N| = |B''N| = \ldots ,$$

т. е. точки светящейся линии B, B', B'', … образуют окружность с центром в точке N — нижнем крае стержня. **(4 б.)**

Заметим, что в приведённых рассуждениях нигде не использовалась форма стержня, поэтому они одинаково верны и для круглых, и для некруглых стержней. **(2 б.)**

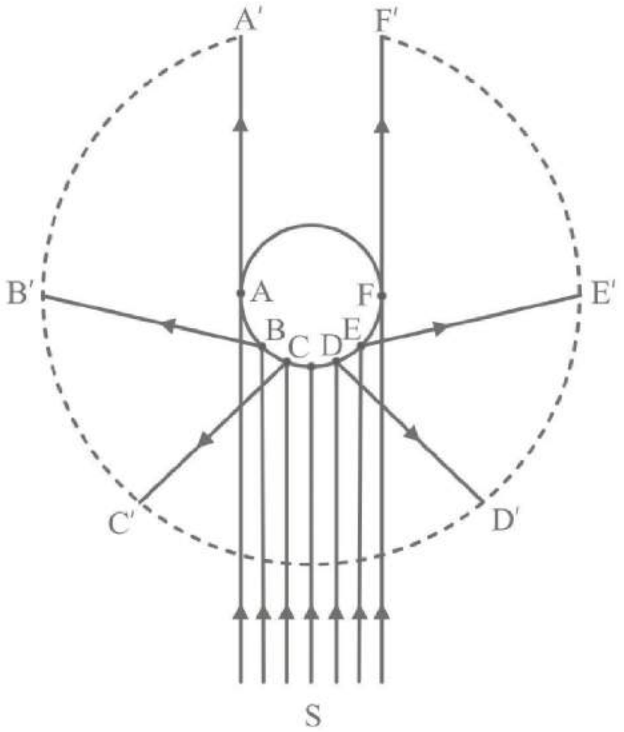


Рисунок 1.

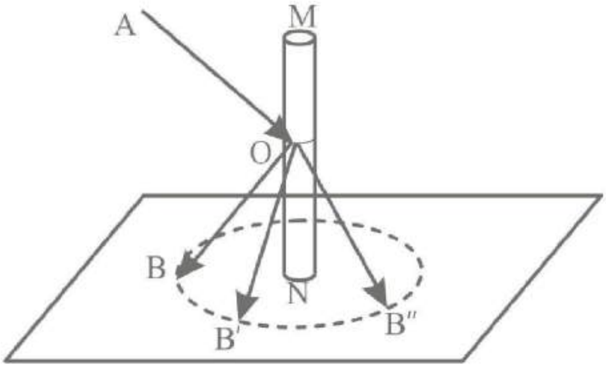


Рисунок 2.

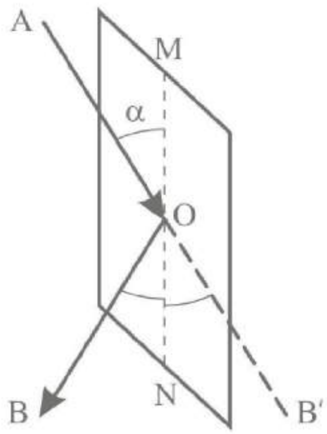


Рисунок 3.