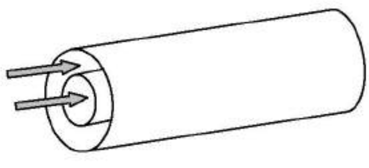
Физика 11 класс



1. Теплообменник состоит из длинной теплоизолированной трубки, в которую вставлена тонкостенная трубка той же длины, но меньшего диаметра (см. рисунок). Во внутреннюю трубку затекает горячая жидкость с температурой $T_{гор} = 90\ °C$ с постоянным расходом $J_{гор} = 2$ кг/с (расход – масса жидкости, которая проходит через трубку в ед. времени). Теплоемкость этой жидкости не зависит от температуры и равняется $C_{гор} = 1600$ Дж/(кг·град). Для того, чтобы эта горячая жидкость охладилась, во внешнюю трубку запустили другую, холодную жидкость с температурой $T_{хол} = 10\ °C$. Теплоемкость холодной жидкости также не зависит от температуры и равняется $C_{хол} = 3200$ Дж/(кг·град). Оказалось, что при расходе холодной жидкости $J_{хол} = 4$ кг/с, горячая жидкость охлаждается на выходе из трубки до необходимой температуры жидкости $T_1 = 50\ °C$. Какова температура холодной жидкости на выходе T_2?

Решение.

За произвольный промежуток времени t через теплообменник протекает горячая жидкость массой $J_{гор} \cdot t$ и холодная жидкость массой $J_{хол} \cdot t$. Эти массы обмениваются теплотой. **(2 б.)**

Таким образом, уравнение теплового баланса заключается в том, что количество теплоты, отданное горячей жидкостью за время t, равно количеству теплоты, приобретённому холодной жидкостью за то же время:

$$C_{гор}\left(J_{гор} \cdot t\right)\left(T_{гор} - T_1\right) = C_{хол}\left(J_{хол} \cdot t\right)\left(T_2 - T_{хол}\right) . \qquad \textbf{(4 б.)}$$

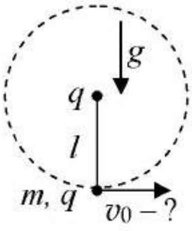
Сократив общий множитель t и выразив отсюда искомую температуру T_2, получим

$$T_2 = T_{хол} + \frac{C_{гор} J_{гор}}{C_{хол} J_{хол}}\left(T_{гор} - T_1\right) . \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Подставив численные значения, получим

$$\textbf{ответ: } T_2 = T_{хол} + \frac{C_{гор} J_{гор}}{C_{хол} J_{хол}}\left(T_{гор} - T_1\right) = 20\ °C . \qquad \textbf{(2 б.)}$$

2. Маленький грузик массой m и заряда q покоится на легкой нити длины l. В точке подвеса закреплен такой же заряд q. Какую минимальную скорость v_0 необходимо придать грузику, чтобы он сделал полный оборот по окружности вокруг точки подвеса? Ускорение свободного падения g.



Решение.

На грузик действуют следующие силы: сила тяжести $m\mathbf{g}$, направленная вертикально вниз, сила кулоновского отталкивания kq^2/l^2, направленная вдоль нити от центра окружности (k — коэффициент пропорциональности в законе Кулона), а также сила натяжения нити $\mathbf{T}$, направленная вдоль нити к центру окружности. Эти силы сообщают грузику центростремительное ускорение v^2/l. В верхней точке траектории второй закон Ньютона принимает вид:

$$m\frac{v^2}{l} = T + mg - k\frac{q^2}{l^2}. \qquad (1) \qquad \textbf{(3 б.)}$$

Поскольку расстояние между зарядами в процессе движения грузика по окружности не меняется, потенциальная энергия взаимодействия зарядов, зависящая от расстояния между ними, также не меняется. Из закона сохранения энергии следует, что начальная кинетическая энергия равна сумме приращения потенциальной энергии и кинетической энергии в верхней точке:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mg\cdot(2l) + \frac{mv^2}{2}. \qquad (2) \qquad \textbf{(3 б.)}$$

Выразив T и v^2 из системы уравнений (1) и (2), получим:

$$T = \left(v_0^2 - 5gl + k\frac{q^2}{ml}\right)\frac{m}{l},$$

$$v^2 = v_0^2 - 4gl.$$

Поскольку сила натяжения нити T и квадрат скорости грузика v^2 не могут быть отрицательными, т.е., $T \geq 0$, $v^2 \geq 0$, справедливы неравенства:

$$v_0^2 \geq 5gl - k\frac{q^2}{ml}, \qquad (3)$$

$$v_0^2 \geq 4gl. \qquad (4)$$

Из этих двух неравенств можно оставить одно, правая часть которого больше.

Если $5gl - k\dfrac{q^2}{ml^2} \geq 4gl$, т.е. $mg \geq k\dfrac{q^2}{l^2}$, минимальное значение v_0 определяется неравенством (3), из которого следует:

$$v_0 = \sqrt{5gl - \frac{kq^2}{ml}}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

(Можно показать, что в этом случае нить перестаёт быть натянутой, когда грузик оказывается в верхней точке окружности.)

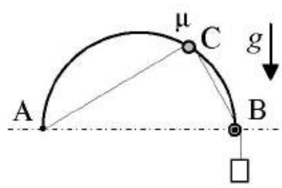
Иначе, т.е. при $mg \le k\dfrac{q^2}{l^2}$, минимальное значение v_0 определяется неравенством (4), из которого следует

$$v_0 = 2\sqrt{gl}\ . \qquad \textbf{(2 б.)}$$

(Можно показать, что в этом случае нить ведёт себя как жёсткий стержень.)

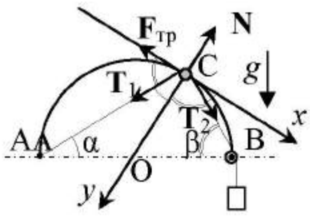
Ответ: $v_0 = 2\sqrt{gl}$, если $mg \le \dfrac{kq^2}{l^2}$; $v_0 = \sqrt{5gl - \dfrac{kq^2}{ml}}$, если $mg \ge \dfrac{kq^2}{l^2}$.

3. Спица в форме полуокружности закреплена вертикально, а её концы A и B лежат на диаметре, ориентированном горизонтально. На спицу нанизана маленькая невесомая бусинка, через которую пропущена нить, закреплённая в точке A и перекинутая через невесомый блок в точке B. К концу нити прикреплён груз. Коэффициент трения между бусинкой и спицей μ (μ<1). Между нитью и бусинкой, а также в блоке трения нет. Найти минимальный угол $\alpha = \angle CAB$ (где точка C — положение бусинки), при котором бусинка находится в равновесии.



Решение.

На бусинку действуют силы натяжения нити $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$, направленные вдоль отрезков CA и CB, сила реакции опоры **N**, направленная вдоль отрезка OC, где O — центр полуокружности, а также сила трения $\mathbf{F}_{тр}$, направленная вдоль касательной к окружности в точке C (см. рисунок).



Направим ось x вдоль касательной к окружности в точке C, а ось y — перпендикулярно оси x, вдоль отрезка CO. Обозначим угол $\angle CAB = \alpha$, а угол $\angle CBA = \beta$. Из законов планиметрии следует: $\beta = (90° - \alpha)$, углы между $\mathbf{T}_1$ и осями x, y равны β и α, соответственно, а углы между $\mathbf{T}_2$ и осями x, y равны α и β. **(1 б.)**

Силы натяжения нити $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ по величине одинаковы. **(1 б.)**

Обозначим их величину T.

В проекции на оси x и y условие равновесия бусинки запишется в виде:

$$F_{тр} = T\cos\alpha - T\cos\beta, \qquad (1)$$ **(3 б.)**

$$N = T\sin\alpha + T\sin\beta. \qquad (2)$$ **(3 б.)**

Минимальный угол α, при котором бусинка находится в равновесии, соответствует силе трения $F_{тр} = \mu N$. Подставив $F_{тр} = \mu N$ в (1) и затем разделив (1) на (2), получим:

$$\mu = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{1 - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}\alpha}.$$

Здесь было учтено, что $\cos\beta = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, а $\sin\beta = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$.

Выразив отсюда tgα, получим:

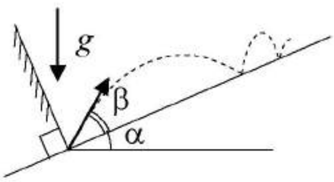
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1-\mu}{1+\mu},$$

откуда найдём

$$\textbf{ответ:}\ \alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right).$$ **(2 б.)***

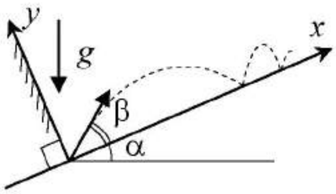
**Примечание.* Этот ответ можно представить и в другом виде, например: $\alpha = 45° - \mathrm{arctg}\,\mu$.

4. Перпендикулярно наклонной плоскости (с углом α к горизонту) установили высокую стенку. Из угла, образованного стенкой и наклонной плоскостью, бросили маленький шарик, сообщив ему скорость под углом β к наклонной ($\alpha + \beta < \pi/2$). Сколько ударов сделает шарик о наклонную плоскость прежде, чем он ударится о стенку? Удары шарика абсолютно упругие. Целую часть числа обозначать [ ].



Решение.

Направим ось x вдоль наклонной плоскости, а ось y — вдоль перпендикулярной ей стенки. Пусть v — скорость, с которой бросили шарик.



а) Сначала рассмотрим движение вдоль оси y. Проекция начальной скорости шарика на эту ось равна $v_y = v\sin\beta$, а проекция ускорения свободного падения на эту ось равна $a_y = -g\cos\alpha$. Тогда время движения между броском и первым ударом о наклонную плоскость равно:

$$T = 2\frac{v_y}{a_y} = 2\frac{v\sin\beta}{g\cos\alpha}. \qquad (1)$$ **(3 б.)**

Множитель 2 в этом выражении учитывает то, что время «подъёма» над наклонной плоскостью вдоль оси y, равно времени «падения». В момент удара о наклонную плоскость шарик имеет такую же по величине (но противоположную по направлению) проекцию скорости на ось y. Поскольку удары шарика о наклонную плоскость упругие, проекция скорости v_y после удара сохраняется, т.е. она такая же как при броске и равна $v\sin\beta$. Поэтому время до каждого последующего удара о наклонную плоскость также определяется выражением (1). **(1 б.)**

б) Теперь рассмотрим движение вдоль оси x. Проекция начальной скорости шарика на эту ось равна $v_x = v\cos\beta$, а проекция ускорения свободного падения на эту ось равна $a_x = -g\sin\alpha$. Тогда время движения между броском и ударом о стенку:

$$t = 2\frac{v_x}{a_x} = 2\frac{v\cos\beta}{g\sin\alpha}. \qquad (2)$$ **(3 б.)**

Чтобы определить, сколько раз шарик ударится о наклонную плоскость до удара о стенку, разделим время t движения между броском и ударом о стенку на время T между ударами о наклонную плоскость, и возьмём целую часть:

$$N = \left[\frac{t}{T}\right].$$ **(1 б.)**

Подставив сюда выражения (1) и (2), получим

ответ: $$N = \left[\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right] = [\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta].$$ **(2 б.)**

5. Оцените среднее расстояние между молекулой углекислого газа и соседней молекулой кислорода в атмосфере Земли при нормальных условиях. *Предполагается, что Вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения задачи величины, выбрать их числовые значения и получить численный результат.*

Решение.

Как известно, атмосфера Земли состоит в основном из азота и кислорода. Содержание других газов, в частности углекислого, значительно меньше содержания кислорода.

Поэтому среднее расстояние между молекулой углекислого газа и соседней молекулой кислорода равно среднему расстоянию между молекулами кислорода. **(2 б.)**

Концентрацию молекул в воздухе можно определить по формуле:

$$n_{\text{возд}} = \frac{N_{\text{A}}}{V_{\text{m}}},$$

где N_{A} — число Авогадро, т.е. число молекул в одном моле, а V_{m} — молярный объём газа, т.е. объём, занимаемый одним молем газа.

Содержание кислорода в воздухе $\varphi \approx 20\%$ (объёмная доля). Тогда концентрация молекул кислорода определяется выражением:

$$n_{\text{O}_2} = \frac{\varphi N_{\text{A}}}{V_{\text{m}}}, \qquad (1)$$ **(2 б.)**

С другой стороны, концентрация кислорода — это величина, обратная объёму V_{O_2}, приходящемуся на одну молекулу кислорода:

$$n_{\text{O}_2} = \frac{1}{V_{\text{O}_2}} \approx \frac{1}{a^3}, \qquad (2)$$ **(2 б.)**

где a — среднее расстояние между двумя соседними молекулами кислорода.
Из (1) и (2) получим выражение для среднего расстояния между двумя соседними молекулами кислорода:

$$a \approx \sqrt[3]{\frac{V_{\text{m}}}{\varphi N_{\text{A}}}}.$$ **(2 б.)**

Подставив численные значения $V_{\text{m}} \approx 0{,}0224$ м^3 при нормальных условиях, $N_{\text{A}} \approx 6\times10^{23}$, $\varphi \approx 0{,}2$, найдём

ответ: $a \approx 6\cdot10^{-9}$ м ≈ 6 нм. **(2 б.)**

6. *Задача-демонстрация (демонстрируется видеоролик).* Два неодинаковых шарика — большой и маленький — подвешены на нитях вплотную друг к другу. В начале эксперимента шарики неподвижны, нити вертикальны, а центры шаров находятся на одинаковой высоте. Один из шариков отклонили и отпустили, после чего наблюдаются столкновения шариков. Оказалось, что если отклонить *маленький* шарик и отпустить его, то после каждого нечётного соударения *шарики движутся в разные стороны*, а после каждого чётного — *большой шарик оказывается неподвижным*. Если же отклонить *большой* шарик и отпустить его, то после каждого нечётного столкновения *шарики движутся в одну сторону*, а после каждого чётного — *маленький шарик неподвижен*. Объясните наблюдаемое явление.

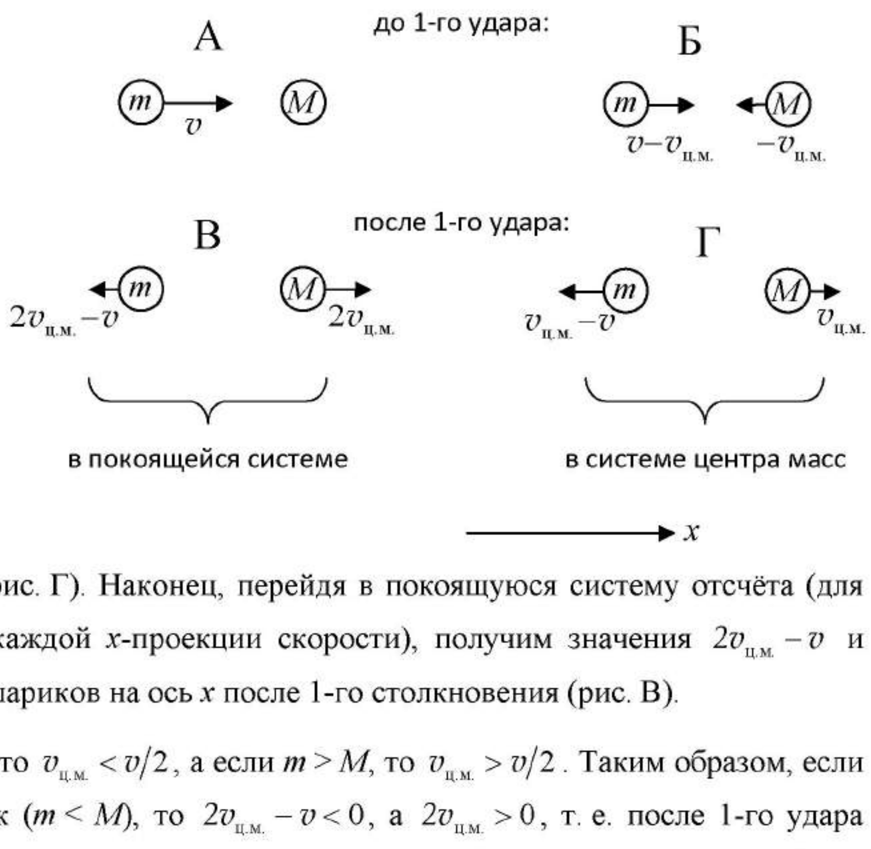
Решение.

Рассмотрим сначала движение шариков после 1-го соударения. Проще всего это сделать, перейдя в систему центра масс, т. е. в систему отсчёта, движущуюся вместе с центром масс двух шариков со скоростью

$$v_{\text{ц.м.}} = \frac{mv}{m+M}. \qquad (1)$$

(Мы обозначили массу отклонённого шарика m, его скорость до удара v, массу неподвижного шарика M.) В системе центра масс при столкновении каждый шарик меняет свою скорость на противоположную — тем самым обеспечивается выполнение законов сохранения энергии (кинетическая энергия каждого шарика не меняется) и импульса (суммарный импульс шариков был и остался равным нулю). Это верно, если удар упругий, что в данном эксперименте выполняется с хорошей точностью.

До удара проекции скоростей шариков на горизонтальную ось x были равны v и 0 относительно покоящейся (лабораторной) системы отсчёта, см. рис. А. Чтобы найти их после удара, перейдём сначала в систему центра масс, вычтя $v_{\text{ц.м.}}$ из каждой x-проекции скорости, получим $v - v_{\text{ц.м.}}$ и $-v_{\text{ц.м.}}$ (рис. Б). После удара эти проекции поменяют знак и станут равны $v_{\text{ц.м.}} - v$ и $v_{\text{ц.м.}}$ (рис. Г). Наконец, перейдя в покоящуюся систему отсчёта (для этого надо прибавить $v_{\text{ц.м.}}$ к каждой x-проекции скорости), получим значения $2v_{\text{ц.м.}} - v$ и $2v_{\text{ц.м.}}$ для проекций скоростей шариков на ось x после 1-го столкновения (рис. В).



Из (1) следует, что если $m < M$, то $v_{\text{ц.м.}} < v/2$, а если $m > M$, то $v_{\text{ц.м.}} > v/2$. Таким образом, если был отклонён *маленький* шарик ($m < M$), то $2v_{\text{ц.м.}} - v < 0$, а $2v_{\text{ц.м.}} > 0$, т. е. после 1-го удара шарики *движутся в разные стороны*. Если же был отклонён *большой* шарик ($m > M$), то $2v_{\text{ц.м.}} - v > 0$ и $2v_{\text{ц.м.}} > 0$ — шарики после 1-го удара *движутся в одну сторону*. **(4 б.)**

(Примечание: к тому же результату можно прийти и другими способами, например, найдя из законов сохранения энергии и импульса, что *x*-проекция скорости налетающего шарика после 1-го соударения равна $v(m-M)/(m+M)$. Любые верные соображения, приводящие к тому же результату, оцениваются в **4 балла**.)

Периоды колебания обоих шариков равны, так как и точки подвеса, и центры масс шариков находятся на одном уровне. Сразу после 1-го удара оба шарика находятся в нижних точках своих траекторий. Поэтому через половину периода после 1-го удара они оба вернутся в то же положение, а их скорости изменятся на противоположные. В этот момент, когда оба шарика вернутся в нижние точки своих траекторий, они соприкоснутся и произойдёт 2-е соударение. Та же ситуация будет происходить и в дальнейшем. Таким образом, скорость каждого шарика перед 2-м столкновением будет такой же по величине, как его скорость сразу после 1-го столкновения, но противоположной по знаку. **(2 б.)**

Рассмотрим скорости шариков до и после каждого столкновения. Перед 1-м столкновением они были равны $\mathbf{v}$ и 0 для отклонённого и неподвижного шариков, соответственно. Обозначим скорости шариков сразу после 1-го столкновения символами $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Согласно вышесказанному, перед 2-м столкновением эти проекции станут равны $-\mathbf{v}_1$ и $-\mathbf{v}_2$. Чтобы найти скорости шариков *после* 2-го столкновения, можно воспользоваться свойством *обратимости* механических явлений: если видеозапись какого-либо механического движения воспроизвести в обратном направлении, то она будет выглядеть как запись другого, тоже возможного движения, в котором скорости всех тел изменены на противоположные, а будущее и прошлое поменялись местами. (Это верно только для процессов без потери энергии на трение.) В этом смысле 2-е столкновение является обратным процессом по отношению к 1-му, поскольку скорости шариков *перед* 2-м столкновением противоположны их скоростям *после* 1-го столкновения. Следовательно, скорости шариков *после* 2-го столкновения будут противоположны скоростям *перед* 1-м столкновением и равны $-\mathbf{v}$ и 0, соответственно. Таким образом, тот шарик, который был неподвижен перед 1-м столкновением, остановится после 2-го столкновения. **(4 б.)**

(Примечание: этот результат можно получить и по-другому, например, записав и сравнив законы сохранения энергии и импульса при 1-м и 2-м ударе, или рассмотрев 2-й удар в системе центра масс, аналогично тому, как сделано выше для 1-го удара. Любые верные соображения, приводящие к тому же результату, оцениваются в **4 балла**.)

Ситуация перед третьим ударом в точности повторяет ситуацию перед первым: тот же самый шарик налетает на другой, неподвижный, шарик. Поэтому каждый $(n+2)$-й удар будет повторением n-го. В результате, после каждого нечётного удара оба шарика движутся так же, как после первого, а после каждого чётного удара один из шариков неподвижен.