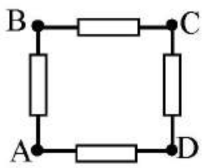
Физика 10 класс



1. Школьник Петя собрал схему, состоящую из четырёх резисторов как показано на рисунке. Три резистора с одинаковым сопротивлением r, а сопротивление четвёртого резистора R отличается. Школьник при помощи омметра последовательно измерил сопротивление между точками AB, BC и CD. Получившиеся значения оказались равны R_{AB} = 0,8 кОм, R_{BC} = 0,8 кОм, R_{CD} = 1,2 кОм, соответственно. Найдите значения r и R.

Решение.

Допустим, что резистор с сопротивлением R включён между точками A и B. Тогда согласно правилу сложения последовательных и параллельных сопротивлений

$$R_{\text{AB}} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{3r}\right)^{-1},$$

а

$$R_{\text{BC}} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2r+R}\right)^{-1},$$

а

$$R_{\text{CD}} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2r+R}\right)^{-1}.$$

То есть $R_{BC} = R_{CD}$, что противоречит условию. Таким образом, резистор сопротивлением R не включён между точками A и B. Аналогичными рассуждениями можно показать, что этот резистор не включён между точками B и C, а также между точками A и D. Поэтому, резистор с сопротивлением R включён между точками C и D. **(4 б.)**

Следовательно,

$$R_{\text{AB}} = R_{\text{BC}} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2r+R}\right)^{-1} = \frac{r(2r+R)}{3r+R}, \qquad (1)$$ **(2 б.)**

$$R_{\text{CD}} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{3r}\right)^{-1} = \frac{R \cdot 3r}{3r+R}. \qquad (2)$$ **(2 б.)**

Разделив (1) на (2), найдём

$$\frac{R_{\text{AB}}}{R_{\text{CD}}} = \frac{2\frac{r}{R}+1}{3} = \frac{0,8\,\text{кОм}}{1,2\,\text{кОм}} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда найдём

$$R = 2r. \qquad (3)$$

Подставив (3) в (2), найдём

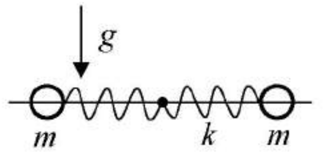
$$r = \frac{5}{6} R_{\text{CD}} = \frac{5}{6} 1,2\,\text{кОм} = 1\,\text{кОм},$$

а

$$R = 2R = 2 \cdot 1\,\text{кОм} = 2\,\text{кОм}.$$

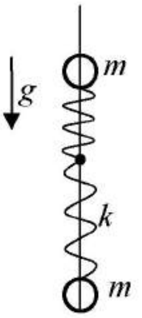
Ответ: $r = 1$ кОм, $R = 2$ кОм. **(2 б.)**

2. Длинная спица закреплена серединой на горизонтальной оси и может вокруг нее вращаться в вертикальной плоскости. Вдоль нее могут скользить две одинаковые бусинки массы m, находящиеся на спице по разные стороны от точки крепления. Бусинки легкими пружинами жесткости k соединены с осью. В начальный момент спица расположена горизонтально и вся система покоится. Однако это положение неустойчивое. Из-за случайного слабого возмущения система переходит в новое устойчивое положение равновесия. Найдите теплоту $Q_Т$, которая выделится в процессе такого перехода. Ускорение свободного падения g. Трением и влиянием воздуха пренебречь.



Решение.

В начальный момент пружины нерастянуты, а их длины x_0 равны, поскольку система находится в равновесии (пусть и неустойчивом). Обозначим изменение длин после поворота в вертикальное устойчивое положение Δx_1 (для нижней пружины) и Δx_2 (для верхней).



Из второго закона Ньютона, записанного по отдельности для нижнего и верхнего грузиков в новом положении равновесия $mg = k\cdot\Delta x_1$ и $mg = -k\cdot\Delta x_2$ получим, что

$$\Delta x_1 = -\Delta x_2 = \frac{mg}{k}, \qquad (1)$$ **(2 б.)**

Изменение потенциальной энергии бусинок, связанный с силой тяжести, равно

$$\Delta W_Т = -mg\left(x_0 + \Delta x_1\right) + mg\left(x_0 + \Delta x_2\right) = -mg\left(\Delta x_1 - \Delta x_2\right).$$ **(2 б.)**

Изменение упругой энергии пружин равно

$$\Delta W_П = \frac{k\left(\Delta x_1\right)^2}{2} + \frac{k\left(\Delta x_2\right)^2}{2}.$$ **(2 б.)**

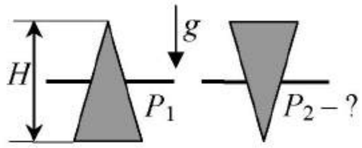
Из закона сохранения энергии $Q_Т + \Delta W_Т + \Delta W_П = 0$ следует:

$$Q_Т = -\Delta W_Т - \Delta W_П = mg\left(\Delta x_1 - \Delta x_2\right) - \frac{k}{2}\left(\left(\Delta x_1\right)^2 + \left(\Delta x_2\right)^2\right).$$ **(2 б.)**

Подставив в предыдущее выражение (1) и выразив из получившегося выражения $Q_Т$ получим

ответ: $Q_Т = \dfrac{m^2 g^2}{k}$. **(2 б.)**

3. Клапан в виде массивного конуса открывается, когда давление на верхней границе закрытого резервуара с жидкостью опускается до значения P_1. Конус перевернули для использования в качестве клапана, который открывается при повышении давлении. При каком давлении P_2 вода начнет вытекать из резервуара. Высота конуса H, плотность воды ρ, ускорение свободного падения g. Диаметр основания конуса в 2 раза больше диаметра отверстия. Трением между конусом и стенками резервуара пренебречь.



Решение.

Пусть атмосферное давление P_0, масса конуса m, площадь его основания S.
Объем конуса $V=HS/3$, площадь отверстия $S/4$, объем верхней части конуса (конус с тем же углом раствора, но с высотой $H/2$) равен $V/8$. **(2 б.)**
На конус действуют сила тяжести, сила Архимеда, определяемая объёмом части, погруженной в воду, и сила, обусловленная разностью давлений жидкости и атмосферы.
Запишем условие равновесия конуса до того, как его перевернули:

$$mg - \rho_B g \frac{7}{8}V = (P_1 - P_0)\frac{S}{4}. \qquad (1)$$ **(3 б.)**

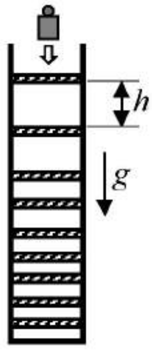
Условие равновесия после того, как конус перевернули:

$$mg - \rho_B g \frac{1}{8}V = (P_2 - P_0)\frac{S}{4}. \qquad (2)$$ **(3 б.)**

Вычтя из (2) (1) и выразив из получившегося выражения P_2, получим

ответ: $P_2 = P_1 + \rho_B g H$. **(2 б.)**

4. Вертикально стоящий сосуд перекрыт девятью одинаковыми поршнями. В промежутках под каждым из них находится одинаковое количество воздуха. Высота промежутка под верхним поршнем h = 11 см, а давление воздуха под ним в 2 раза больше атмосферного. Насколько опустится верхний поршень, если его массу удвоить? Температуру считать постоянной.



Решение.

Обозначим атмосферное давление P_0, давление под n-м поршнем — P_n. По условию давление воздуха под первым поршнем в два раза больше атмосферного, тогда условие равновесия первого поршня запишется в виде

$$P_1 = 2P_0 = P_0 + \frac{mg}{S}, \qquad (1) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

где m — масса поршня, g — ускорение свободного падения, а S — площадь поршня, а условие равновесия n-го поршня:

$$P_n = P_{n-1} + \frac{mg}{S}. \qquad (2) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Так как под каждым поршнем находится одинаковое количество воздуха, то из закона Бойля-Мариотта

$$P_0 Sh = P_n Sh_n. \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Тогда высота воздушного объема под n-м поршнем:

$$h_n = \frac{P_0}{P_n} h. \qquad (3) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Выразив из (1) и (2) P_n через P_0 и подставив в (3), получим

$$h_n = \frac{2}{n+1} h. \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Высота, на которой находится первый поршень, равна:

$$H = \sum_{n=1}^{9} \frac{2}{n+1} h = 2h\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{10}\right). \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Если увеличить массу верхнего поршня в два раза, то уравнение (1) изменится на:

$$P_1 = P_0 + \frac{2mg}{S}, \qquad (1') \qquad \textbf{(1 б.)}$$

а аналогичные рассуждения приведут к новой высоте поршня

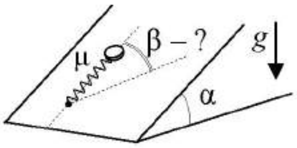
$$H' = \sum_{n=1}^{9} \frac{2}{n+2} h = 2h\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{11}\right). \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Высота, на которую опустится верхний поршень,

$$H - H' = h - \frac{2}{11}h = \frac{9}{11}h \,. \qquad \textbf{(1 б.)}$$

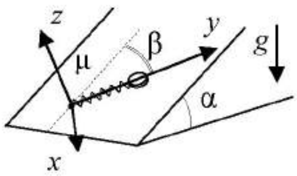
Подставив в получившееся выражение численное значение h, получим

ответ: высота понизится на 9 см. **(1 б.)**



5. На шероховатой наклонной плоскости с углом при основании α лежит шайба, которая соединена с пружинкой, а другой конец пружинки прикреплён к плоскости (см. рис.). Коэффициент трения шайбы о плоскость $\mu < \mathrm{tg}\,\alpha$. В начальный момент ось пружинки направлена вверх по склону вдоль скатывающей силы. Шайбу начинают последовательно подталкивать маленькими толчками каждый раз в направлении перпендикулярном оси пружинки. При каком отклонении оси пружинки от начального положения шайба «сорвётся» и сама начнёт скользить вниз?

Решение.



На шайбу будут действовать сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила трения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$, сила упругости пружинки $\mathbf{F}_{\text{упр}}$ и сила реакции со стороны наклонной плоскости $\mathbf{N}$. Рассмотрим систему в момент «срыва». Введём систему координат, где ось x лежит на наклонной плоскости перпендикулярно пружинке, ось y лежит на наклонной плоскости вдоль пружинки, а ось z перпендикулярна наклонной плоскости (см. рис.). Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось z:

$$N = mg\cos\alpha\,. \qquad (1)$$ **(2 б.)**

Дальнейшие рассуждения можно провести различными способами.

1-й способ

В момент «срыва» шайба ещё покоится, а сила трения направлена перпендикулярно пружинке и достигает величины

$$F_{\text{тр}} = \mu N\,. \qquad (2)$$ **(2 б.)**

Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось x:

$$mg\sin\alpha\sin\beta = F_{\text{тр}}\,. \qquad (3)$$ **(4 б.)**

Подставив (1) в (2), а получившееся выражение в (3) найдём

ответ: $\beta = \arcsin\left(\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha\right)$. **(2 б.)**

2-й способ

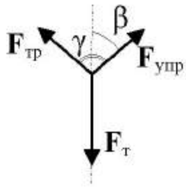
На наклонной плоскости существует множество точек, в которых изначально покоящаяся шайба будет находится в положении равновесия. В этих точках величина силы трения меняется от некоторого минимального значения до максимального, равного μN. Зависимость величины силы трения от координат точек должна быть плавной функцией (её можно найти аналитически из условия равновесия). Значит, упомянутое множество устойчивых точек является замкнутой областью с границей. Очевидно, что при небольшом увеличении μ (т.е. максимальной силы трения) эта область будет расширяться во все стороны (заметьте, что при $\mu \to \infty$ область расширится на всю наклонную плоскость). Следовательно, на границе устойчивой области сила трения максимальна и равна μN, где N выражается уравнением (1): $F_{\text{тр}} = \mu mg\cos\alpha$. Проекции на наклонную плоскость трёх сил, действующих на шайбу, находящуюся на границе устойчивой области, можно записать в виде:

$$F_{\text{тр}} = \mu mg\cos\alpha\,, \qquad (4)$$ **(1 б.)**

$$F_{\text{т}} = mg\sin\alpha\,, \qquad (5)$$ **(1 б.)**

$$F_{\text{упр}} = F\,.$$

Здесь абсолютное значение силы упругости мы считаем неизвестной (искомой) величиной, которую для краткости обозначим буквой F. Мы будем также считать неизвестным направление силы трения и обозначим буквой γ угол между ним и силой упругости (см. рис.).



Запишем условие равновесия сил соответственно в проекции на оси y и x для шайбы, покоящейся на границе устойчивой области:

$$F + F_{тр}\cos\gamma = F_{т}\cos\beta, \qquad (6) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

$$F_{тр}\sin\gamma = F_{т}\sin\beta. \qquad (7) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

В уравнении (6) перенесём F в правую часть, возведём в квадрат обе части каждого из уравнений (6) и (7) и сложим эти уравнения. С учётом равенств $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ и $\sin^2\gamma+\cos^2\gamma=1$ в результате получим:

$$F_{тр}^2 = F_{т}^2 + F^2 - 2F_{т}F\cos\beta.$$

Это равенство представляет собой квадратное уравнение на силу упругости F:

$$F^2 - 2F_{т}F\cos\beta + F_{т}^2 - F_{тр}^2 = 0,$$

которое имеет решение только при неотрицательном дискриминанте:

$$\left(2F_{т}F\cos\beta\right)^2 - 4\left(F_{т}^2 - F_{тр}^2\right) \ge 0. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Разделив это неравенство на $4F_{т}^2$ и подставив $\cos^2\beta = 1-\sin^2\beta$, найдём:

$$\sin\beta \le \frac{F_{тр}}{F_{т}}.$$

Значит, максимальному значению β соответствует равенство:

$$\sin\beta = \frac{F_{тр}}{F_{т}}.$$

(Заметим, что, подставив его в (7), мы получим $\sin\gamma=1$ или $\gamma = \pi/2$, что и предполагалось в 1-м способе.) Подставив сюда (4) и (5), получим:

$$\sin\beta = \mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Ответ: $\beta = \arcsin\left(\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha\right)$. **(2 б.)**