## Физика 9 класс

1. Велосипедист, двигаясь вдоль проспекта, заметил, что трамваи, движущиеся ему навстречу, встречаются втрое чаще, чем обгоняющие его попутные трамваи. Автомобилист, двигаясь по тому же проспекту, также заметил, что встречные трамваи он видит втрое чаще попутных, которые он периодически обгоняет. Считая скорости велосипеда, автомобиля и трамваев постоянными, а интервалы движения трамваев в обе стороны одинаковыми, определите, во сколько раз автомобиль двигается быстрее велосипеда.

**Решение.**

Пусть $v_в$, $v_т$, $v_а$ — скорости велосипедиста, трамвая и автомобилиста, соответственно. Из условия очевидно, что $v_в < v_т < v_а$. Относительная скорость сближения велосипедиста и автомобилиста со встречными трамваями равна сумме соответствующих скоростей, а с попутными — разности. Условие того, что при одинаковых интервалах движения встречные трамваи встречаются велосипедисту и автомобилисту втрое чаще попутных, означает, что соответствующие относительные скорости отличаются в 3 раза:

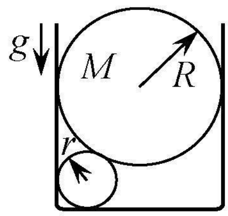
$$\frac{v_т + v_в}{v_т - v_в} = 3, \qquad (1) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

$$\frac{v_а + v_т}{v_а - v_т} = 3. \qquad (2) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

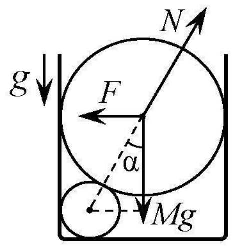
Из (1) и (2) найдём уравнения: $v_т/v_в = 2$, $v_а/v_т = 2$. Перемножив эти уравнения, получим

**ответ:** $v_а/v_в = 4$. **(2 б.)**

2. На дно цилиндрического стакана радиуса $R$ положили шарик радиуса $r$ ($r < R$), а сверху на него шар радиуса $R$ и массы $M$. С какой силой $F$ верхний шар давит на боковую стенку стакана? Трения нет. Ускорение свободного падения $g$.




**Решение.**



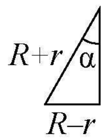

На верхний шарик действуют: сила тяжести, направленная вниз, сила реакции $F$ со стороны боковой стенки, направленная горизонтально (равная по третьему закону Ньютона искомой силе), а также сила реакции $N$ со стороны нижнего шара, направленная вдоль линии, соединяющей центры шаров. Запишем условие равновесия верхнего шара в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$N\sin\alpha = F\,, \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

$$N\cos\alpha = Mg\,. \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Здесь α — угол между вертикалью и линией, соединяющей центры шаров. Разделив (1) на (2) и выразив $F$, получим

$$F = Mg\,\mathrm{tg}\,\alpha\,. \qquad (3) \qquad \textbf{(2 б.)*}$$




Тангенс угла α находим из прямоугольного треугольника с гипотенузой, соединяющей центры шаров, и катетами, направленными горизонтально и вертикально (см. рис.). Длина гипотенузы треугольника равна $R+r$, а длина катета, лежащего напротив угла α равна $R–r$. По теореме Пифагора находим длину второго катета $2\sqrt{Rr}$ и

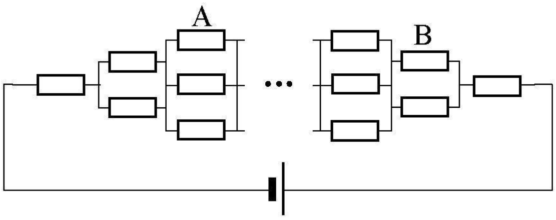
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{R-r}{2\sqrt{Rr}}\,. \qquad (4) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Подставив (4) в (3), получим

**ответ:** $F = Mg\dfrac{R-r}{2\sqrt{Rr}}$. **(2 б.)**

**Примечание:* это уравнение можно также получить из условия равенства моментов сил, действующих на верхний шар, относительно точки касания шаров $FR\cos\alpha = MgR\sin\alpha$.

3. По электрической цепи, состоящей из большого числа одинаковых резисторов и источника напряжения (см. рис.), течёт ток. Найти отношение теплоты, которая выделяется на сопротивлении А в единицу времени, к теплоте, выделяющейся на сопротивлении В в единицу времени.




**Решение.**

Пусть через источник течёт ток $I$. Участок цепи, состоящий из трёх параллельно соединённых сопротивлений, включая сопротивление А, включён в цепь последовательно с источником. Поэтому, через него течёт тот же ток $I$. Поскольку эти три сопротивления одинаковы, через них текут одинаковые токи $I_A$, сумма которых, по правилу Кирхгофа равна $I$. Следовательно,

$$I_A = \frac{I}{3}. \quad (1) \quad \textbf{(3 б.)}$$

Рассмотрев аналогично участок цепи, состоящий из двух параллельно соединённых сопротивлений, включая сопротивление В, получим

$$I_B = \frac{I}{2}, \quad (2) \quad \textbf{(3 б.)}$$

где $I_B$ — ток, текущий через сопротивление В.

По закону Джоуля — Ленца, при пропускании постоянного тока $I$ на сопротивлении $R$ за промежуток времени $\Delta t$ выделяется количество теплоты $\Delta Q = I^2 R\Delta t$. Соответственно, количество теплоты, выделяющееся на сопротивлении $R$ в единицу времени, равно

$$W = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = I^2 R.$$

Поскольку все сопротивления одинаковы, отсюда следует, что

$$\frac{W_A}{W_B} = \frac{I_A^2}{I_B^2}. \quad \textbf{(2 б.)}$$

Подставив сюда (1) и (2), получим

$$\textbf{ответ: } \frac{W_A}{W_B} = \frac{4}{9}. \quad \textbf{(2 б.)}$$

4. Многоступенчатая ракета стартует с поверхности Земли и летит с постоянным ускорением под некоторым постоянным углом к горизонту. Каждая ступень работает одинаковое время, после чего отделяется и падает по баллистической траектории (без двигателей). Первая ступень упала на расстоянии $S_1$ от места старта. На каком расстоянии упадет вторая ступень? Для полёта на указанные расстояния поверхность Земли считать плоской. Влиянием воздуха пренебречь.

**Решение.**

Проще всего решить эту задачу из соображений размерности.

Расстояние $S$ от места старта до точки падения ступени зависит только от четырёх величин: времени $t$, в течение которого она двигалась в составе ракеты; горизонтальной и вертикальной проекций ускорения ракеты $a_x$, $a_y$; и ускорения свободного падения $g$.

Ускорение имеет размерность [длина]/[время]$^2$. Следовательно, величину размерности длины можно получить из величин размерности ускорения и времени единственным способом:

[длина] = [время]$^2$·[ускорение].

Поскольку в постановке задачи участвуют три величины $a_x$, $a_y$, $g$ размерности ускорения, то в выражение для $S$ могут войти также безразмерные отношения $a_x/g$, $a_y/g$ этих ускорений. Таким образом, выражение для $S$ должно иметь следующий вид:

$$S = t^2 \cdot g \cdot f\left(\frac{a_x}{g}, \frac{a_y}{g}\right), \qquad (1)$$ **(6 б.)**

где $f$ — некоторая безразмерная функция отношений $a_x/g$ и $a_y/g$. (конкретный вид этой функции для решения задачи не важен.)

Обозначим время движения первой и второй ступени в составе ракеты $t_1$ и $t_2$ соответственно; расстояние от места старта до места падения второй ступени $S_2$. Тогда, согласно (1),

$$S_1 = t_1^2 \cdot g \cdot f\left(\frac{a_x}{g}, \frac{a_y}{g}\right), \qquad (2)$$

$$S_2 = t_2^2 \cdot g \cdot f\left(\frac{a_x}{g}, \frac{a_y}{g}\right), \qquad (3)$$

откуда

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2. \qquad (4)$$ **(2 б.)**

Здесь мы учли, что величины $a_x$, $a_y$, $g$ для траекторий обеих ступеней — одни и те же. Так как $t_2/t_1 = 2$ по условию задачи, то из (4) получим

**ответ:** $S_2 = 4S_1$. **(2 б.)**

Отметим, что с помощью таких же рассуждений можно показать, что расстояние между любыми характерными точками траектории второй ступени в 4 раза больше расстояния между соответствующими точками траектории первой ступени. Иными словами, эти траектории подобны с коэффициентом подобия $k = 4$.

*Примечание:* возможны и другие решения, которые, на наш взгляд, являются излишне громоздкими. Например, можно вычислить проекции на горизонтальную ось трёх участков OA, AB, BC траектории ступени (см. рисунок):

$$(\mathrm{OA})_x = \frac{a_x t^2}{2}, \qquad \textbf{(1 б.)}$$

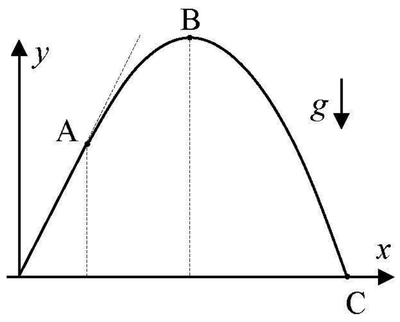
$$(\mathrm{AB})_x = (a_x t)\left(\frac{a_y t}{g}\right), \qquad \textbf{(1 б.)}$$

$$(\mathrm{BC})_x = (a_x t)\sqrt{\frac{2H}{g}}, \qquad \textbf{(1 б.)}$$

где

$$H = \frac{a_y t^2}{2} + \frac{(a_y t)^2}{2g} \text{ —} \qquad \textbf{(1 б.)}$$

высота верхней точки B траектории, сомножитель $(a_x t)$ — горизонтальная скорость на участках AB и BC, сомножитель $\left(\frac{a_y t}{g}\right)$ — время движения от A до B, сомножитель $\sqrt{\frac{2H}{g}}$ — время движения от B до C. Таким образом,

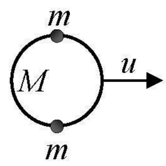



$$S = (\mathrm{OA})_x + (\mathrm{AB})_x + (\mathrm{BC})_x = t^2 \cdot g \cdot \frac{a_x}{g}\left(\frac{1}{2} + \frac{a_y}{g} + \sqrt{\frac{a_y}{g} + \left(\frac{a_y}{g}\right)^2}\right). \qquad (5) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Далее, (4) получается из (5) с помощью тех же рассуждений, которыми мы получили выше (4) из (1). Согласно (5), функция $f$, фигурирующая в (1) — (3), имеет вид

$$f\left(\frac{a_x}{g}, \frac{a_y}{g}\right) = \frac{a_x}{g}\left[\frac{1}{2} + \frac{a_y}{g} + \sqrt{\frac{a_y}{g} + \left(\frac{a_y}{g}\right)^2}\right].$$

5. На гладкое проволочное кольцо массы $M$ надеты две одинаковые бусинки массой $m$, которые первоначально находились на противоположных сторонах кольца. Кольцу ударом сообщили скорость $u$ в направлении, перпендикулярном к линии, соединяющей центры бусинок. Найти скорости бусинок к моменту их столкновения. Силой тяжести пренебречь.




**Решение.**

Пусть $\mathbf{v}$ — искомая скорость одной из бусинок. Её можно представить в виде векторной суммы скорости кольца $\mathbf{v}_К$, направленной вдоль $\mathbf{u}$, и скорости бусинки относительно кольца $\mathbf{v}'$: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_К + \mathbf{v}'$. Перед соударением $\mathbf{v}'$ направлена по касательной к кольцу, а следовательно, перпендикулярна направлению $\mathbf{u}$. Значит, проекция $\mathbf{v}$ на это направление равна $v_К$.

Поэтому, согласно закону сохранения импульса, записанному в проекции на направление $\mathbf{u}$,

$$Mu = (M + 2m)v_к. \qquad (1) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

По закону сохранения энергии,

$$\frac{Mu^2}{2} = \frac{Mv_к^2}{2} + \frac{2mv^2}{2}. \qquad (2) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Выразив $v_К$ из (1) и подставив в (2), получим

$$\textbf{ответ: } v = \frac{\sqrt{2M(M+m)}}{M+2m}u. \qquad \textbf{(2 б.)}$$