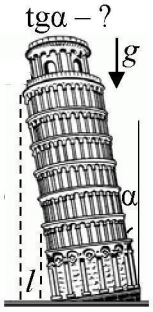
Физика 10 класс

1. Галилей бросил первый камень с вершины Пизанской башни, а второй — с одного из средних этажей. Он бросал камни с нулевой начальной скоростью и измерял время их падения на землю, которое для первого камня оказалось равным t_1, а для второго — t_2. Спустившись на землю, он измерил расстояние l между точками падения камней. Определите тангенс угла наклона Пизанской башни к вертикали. Ускорение свободного падения g. Влиянием воздуха пренебречь.



Решение.

При падении с нулевой начальной скоростью время падения камня t и высота H связаны соотношением

$$H = \frac{gt^2}{2}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Расстояние от основания башни до точки падения равно $H\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где α — угол наклона Пизанской башни к вертикали.

Расстояние от основания Пизанской башни до точки падения первого камня

$$l_1 = \frac{gt_1^2}{2}\mathrm{tg}\,\alpha, \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Аналогично, расстояние от основания Пизанской башни до точки падения второго камня

$$l_2 = \frac{gt_2^2}{2}\mathrm{tg}\,\alpha. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Тогда расстояние между точками падения камней

$$l = l_1 - l_2 = \frac{g}{2}\left(t_1^2 - t_2^2\right)\mathrm{tg}\,\alpha. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Выражая из этого уравнения тангенс угла наклона Пизанской башни к вертикали, получим

ответ: $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{2l}{g\left(t_1^2 - t_2^2\right)}$. **(2 б.)**

2. Монгольфьер (аэростат с нерастяжимой открытой снизу оболочкой, наполненной горячим воздухом) совершал горизонтальный полет при атмосферном давлении P_0 и температуре T_0. В результате пересечения атмосферного фронта давление снаружи упало до P_1, а температура до T_1, и монгольфьер начал опускаться. До какой температуры нужно нагреть воздух в монгольфьере, чтобы он перестал опускаться? Первоначально температура воздуха внутри аппарата была равна T.

Решение.

Так как изначально монгольфьер совершал горизонтальный полёт, то действующая на него сила тяжести $Mg + \rho_{вн1}Vg$ уравновешивалась силой Архимеда $\rho_{сн1}Vg$:

$$Mg + \rho_{вн1}Vg = \rho_{сн1}Vg, \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где M — масса монгольфьера без находящегося внутри воздуха, g — ускорение свободного падения, V — объём монгольфьера, а $\rho_{сн1}$ и $\rho_{вн1}$ — плотности воздуха снаружи и внутри монгольфьера до прохождения атмосферного фронта, соответственно. После прохождения атмосферного фронта и соответствующего подогрева воздуха внутри монгольфьера уравнение его равновесия запишется аналогично (1):

$$Mg + \rho_{вн2}Vg = \rho_{сн2}Vg, \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где $\rho_{сн2}$ и $\rho_{вн2}$ — плотности воздуха снаружи и внутри монгольфьера после прохождения атмосферного фронта, соответственно.

Запишем закон Менделеева — Клапейрона для воздуха, считая его идеальным газом:

$$PV = \frac{\rho V}{\mu}RT, \qquad \textbf{(1 б.)}$$

где P, V, T, ρ, μ — давление, объём, температура, плотность и молярная масса воздуха, а R — универсальная газовая постоянная. Выразим отсюда плотность воздуха:

$$\rho = \frac{\mu}{R}\frac{P}{T}. \qquad (3) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Вычтем из (2) (1), и, сократив одинаковые сомножители, получим:

$$\rho_{вн2} - \rho_{вн1} = \rho_{сн2} - \rho_{сн1}.$$

Так как оболочка монгольфьера снизу открыта, то давление воздуха внутри монгольфьера такое же, как и снаружи. **(1 б.)**

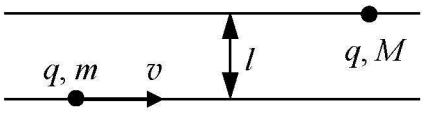
Подставив в предыдущее выражение соответствующие плотности воздуха из (3), использовав необходимые температуры и давления, а также сократив одинаковые сомножители, получим:

$$\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_0}{T_0} = \frac{P_1}{T_x} - \frac{P_0}{T}, \qquad \textbf{(1 б.)}$$

где T_x — искомая температура. Выразив её из предыдущего уравнения, получим

Ответ:. $$T_x = \frac{T_1}{1 - \frac{P_0}{P_1}\left(\frac{T_1}{T_0} - \frac{T_1}{T}\right)}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

3. Две бусинки, заряженные одинаковыми зарядами q, нанизаны на две параллельные спицы, расстояние между которыми равно l. Бусинки могут без трения перемещаться вдоль спиц. В сторону верхней покоящейся бусинки массы M, с большого расстояния запускается нижняя бусинка массы m с начальной скоростью v. Найти минимальную скорость v^*, которую следует сообщить нижней бусинке, чтобы она обогнала верхнюю бусинку, а также конечную скорость верхней бусинки после того, как бусинки вновь разлетятся на большое расстояние. Рассмотреть два случая а) $v > v^*$ и б) $v < v^*$.



Решение.

Нижняя бусинка обгонит верхнюю, если она достигнет точки их наибольшего сближения, когда расстояние между ними равно l (то есть обе бусинки будут находиться на одной вертикали), и при этом будет иметь скорость большую, чем верхняя. Действительно, в дальнейшем, за счёт силы кулоновского взаимодействия между бусинками, скорость нижней бусинки будет только возрастать, а верхней — только убывать. Минимальной начальной скорости v^*, при которой это произойдёт, соответствует равенство скоростей бусинок в момент их наибольшего сближения. Запишем закон сохранения энергии и закон сохранения импульса для начального момента времени и момента наибольшего сближения, когда скорость обеих бусинок u будет одинаковой:

$$\frac{mv^{*2}}{2} = k\frac{q^2}{l} + \frac{(m+M)u^2}{2}, \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

$$mv^* = (m+M)u. \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Выразив u из (2) и подставив в (1) найдём:

$$v^* = \sqrt{2k\frac{q^2}{l}\frac{(m+M)}{Mm}}. \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Запишем законы сохранения энергии и импульса для момента, когда бусинки вновь удалятся на большое расстояние:

$$\frac{mv^2}{2} = m\frac{v_1^2}{2} + M\frac{u_1^2}{2}, \qquad \textbf{(1 б.)}$$

$$mv = mv_1 + Mu_1, \qquad \textbf{(1 б.)}$$

где u_1 скорость верхней бусинки в этом случае, а v_1 — скорость нижней. Решая эту систему из двух уравнений относительно u_1, найдём:

$$u_1\left(u_1 - \frac{2mv}{M+m}\right) = 0. \qquad \textbf{(1 б.)}$$

У этого уравнения есть 2 решения. Первое: $u_1 = \dfrac{2mv}{M+m}$ соответствует $v_1 = \dfrac{m-M}{M+m}v < u_1$ и нижняя бусинка находится слева от верхней. Таким образом, это решение соответствует случаю, когда нижняя бусинка не догонит верхнюю, то есть случаю б).

Второе решение: $u_1 = 0$ соответствует $v_1 = v > u_1$ и верхняя бусинка находится слева от нижней. Таким образом, это решение соответствует случаю, когда нижняя бусинка обгонит верхнюю, то есть случаю а).

Ответ: $v^* = \sqrt{2k\frac{q^2}{l}\frac{(m+M)}{Mm}}$, а) $u_2 = 0$, б) $u_1 = \frac{2mv}{m+M}$. **(2 б.)**

4. Автомобиль массы m начинает разгоняться с места таким образом, что его двигатель развивает постоянную полезную мощность P. Какая энергия выделится в виде тепла к тому времени, когда прекратится проскальзывание колёс? Считать, что все колёса автомобиля ведущие. Коэффициент трения колёс о дорогу μ, ускорение свободного падения g. Колёса перестают проскальзывать одновременно.

Решение.

На автомобиль при разгоне действуют сила тяжести mg, сила реакции опоры N и сила трения $F_{тр} = \mu N$. Автомобиль разгоняется за счёт действующей на него силы трения. Распишем второй закон Ньютона для автомобиля в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси:

$$mg = N,$$

$$\mu N = ma,$$

где a — ускорение автомобиля. Из этих уравнений найдём

$$a = \mu g. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Обозначим буквой u скорость, до которой разгонится автомобиль к моменту, когда колёса перестанут проскальзывать. При равноускоренном движении это произойдёт через время

$$t = \frac{u}{a} = \frac{u}{\mu g}. \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Поскольку к этому моменту колёса перестанут проскальзывать, вся мощность двигателя пойдёт на разгон автомобиля, то есть на работу силы трения:

$$P = F_{тр} \cdot u = \mu mgu. \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

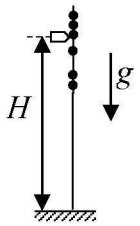
По закону сохранения энергии, за время разгона работа двигателя Pt пойдёт на кинетическую энергию автомобиля $mu^2/2$ и искомое выделившееся тепло Q:

$$Pt = Q + \frac{mu^2}{2}, \qquad (3) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Подставим (1) в (3), а затем в полученное выражение u, выраженное из (2), найдём

Ответ: $Q = \dfrac{P^2}{2m(\mu g)^2}$. **(2 б.)**

5. С высоты H по вертикальной спице начинают отпускать одинаковые бусинки без начальной скорости. Последнюю бусинку отпустили с высоты H, когда первая опустилась на половину начальной высоты. Через какое время после отпускания последняя бусинка вернётся в начальную точку? Ускорение свободного падения g. Удары бусинок об пол и друг о друга считать упругими, размерами бусинок пренебречь. Трения между бусинками и спицей нет.



Решение.

Как известно, при лобовом упругом столкновении тел одинаковой массы происходит обмен скоростями между ними (это нетрудно показать с помощью соответствующих законов сохранения энергии и импульса). **(2 б.)**

Поскольку, по условию, размер бусинок пренебрежимо мал, такой обмен скоростями между ними можно формально рассматривать как пролёт одной бусинки «сквозь» другую. Очевидно, что в исходную точку первой вернётся последняя бусинка. Следовательно, при описанном выше подходе, при котором бусинки «как бы» пролетают сквозь друг друга, не сталкиваясь, нужно рассмотреть бусинку, которая первой вернётся в исходную точку. Для не сталкивающихся бусинок таковой будет, очевидно, первая отпущенная. Таким образом, искомое время будет равно времени, в течение которого одиночная бусинка, отпущенная из верхней точки, пролетела бы путь от половины высоты до пола и затем наверх в исходную точку. **(3 б.)**

Время свободного падения $t(h)$ с нулевой начальной скоростью, как и время подъёма до исходной точки после упругого отражения от пола, связано с высотой h соотношением $h = gt^2/2$, или

$$t(h) = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,. \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Время падения с половины высоты

$$\tau_1 = t(H) - t\left(\frac{H}{2}\right) = \sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{H}{g}}\,. \qquad (1) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Время подъёма от пола в исходную точку

$$\tau_2 = t(H) = \sqrt{\frac{2H}{g}}\,. \qquad (2) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Следовательно, искомое время

$$\tau = \tau_1 + \tau_2\,.$$

Подставив сюда (1) и (2), найдём

Ответ: $\tau = \sqrt{\frac{H}{g}}\left(\sqrt{8} - 1\right)$. **(2 б.)**