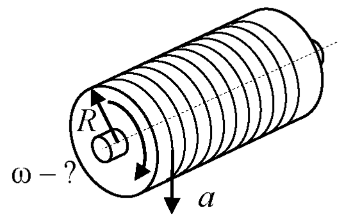
Физика 10 класс

1. Найти угловую скорость, до которой будет раскручен круглый изначально не вращающийся маховик радиуса R с помощью тонкой верёвки длины L, которую вытягивают с постоянным ускорением a. Верёвка не проскальзывает.



Решение.

Пусть верёвку вытягивали в течение периода времени t. В конце этого периода скорость верёвки

$$v = at \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

равна линейной скорости обода маховика:

$$v = \omega R, \qquad (2) \qquad \textbf{(3 б.)}$$

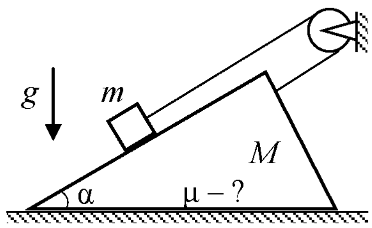
а конец, за который тянули верёвку, сместился на расстояние

$$L = \frac{at^2}{2}. \qquad (3) \qquad \textbf{(3 б.)}$$

Выразив t из (1) и подставив в (3), найдём $v = \sqrt{2aL}$. Подставив полученное выражение в (2), найдём

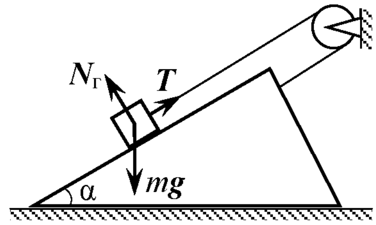
$$\textbf{ответ: } \omega = \frac{\sqrt{2aL}}{R}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

2. На горизонтальном столе располагается система, состоящая из клина массы M с углом при основании α и лежащего на нём груза массы m. Клин и груз соединены лёгкой нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок, как показано на рисунке (прямые отрезки верёвки параллельны наклонной поверхности клина). При каком минимальном коэффициенте трения между клином и столом система будет находиться в покое? Трения между клином и грузом нет.



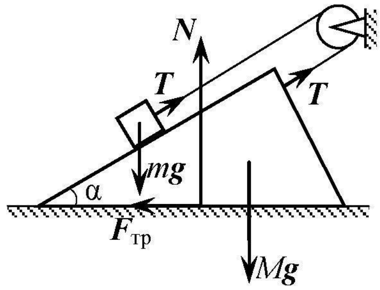
Решение.

На груз действует сила тяжести $m\mathbf{g}$, направленная вниз, сила натяжения нити $\mathbf{T}$, направленная вдоль наклонной плоскости, и сила реакции $\mathbf{N}_г$, перпендикулярная ей. Поскольку груз покоится, сумма этих сил равна нулю. Запишем это условие в проекции на ось, направ-



ленную вдоль наклонной плоскости:

$$T = mg\sin\alpha. \qquad (1)$$ **(2 б.)**



На систему «клин+груз» действует суммарная сила тяжести $(M+m)\mathbf{g}$, направленная вниз, сила реакции опоры **N**, направленная вверх, горизонтальная сила трения $\mathbf{F}_{тр}$ и суммарная сила натяжения 2**T** со стороны обоих концов верёвки, направленная вдоль наклонной плоскости. Поскольку система покоится, сумма этих сил равна нулю. Запишем это условие в проекции на вертикальную ось:

$$(M+m)g = N + 2T\sin\alpha, \qquad (2)$$ **(3 б.)**

а также в проекции на горизонтальную ось:

$$F_{тр} = 2T\cos\alpha. \qquad (3)$$ **(2 б.)**

При искомом минимальном коэффициенте трения μ

$$F_{тр} = N\mu. \qquad (4)$$ **(1 б.)**

Подставив (4) в (3), найдём:

$$\mu = \frac{2T}{N}\cos\alpha.$$

Подставив сюда N, выраженное из (2), а затем T из (1), найдём

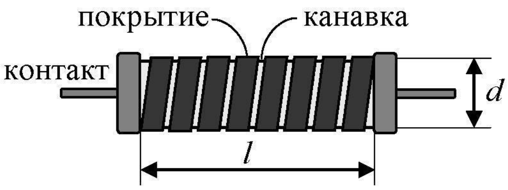
$$\mu = \frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{\frac{M}{m} + 1 - 2\sin^2\alpha} \qquad (5)$$

И после тригонометрических преобразований получим

ответ: $\mu = \dfrac{\sin 2\alpha}{\frac{M}{m} + \cos 2\alpha}$. **(2 б.)**

Примечание: ответ в форме (5) без тригонометрических преобразований также считать допустимым.

3. Резистор изготавливают из непроводящего керамического цилиндра длиной $l = 1$ см и диаметром $d = 2$ мм, на который наносят тонкое проводящее покрытие и затем прорезают



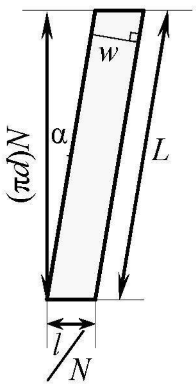
его тонкой спиральной непроводящей канавкой, а на торцы цилиндра напрессовывают контакты. Если канавку не прорезать, то получится резистор сопротивлением R_0 = 1 Ом. Сколько витков должна иметь равномерная спиральная канавка, чтобы резистор имел сопротивление R = 160 Ом? Шириной канавки и вкладом приконтактных областей малого размера пренебречь. Ответ округлить до целого.

Решение.

Без прорезанной канавки развёртка проводящего покрытия представляет собой прямоугольник длиной l и шириной πd. Толщину покрытия обозначим буквой δ. Сопротивление такого резистора равно

$$R_0 = \rho \frac{l}{\delta(\pi d)}, \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где ρ — удельное сопротивление покрытия.



Развёртка покрытия после прорезания спиральной канавки показана на рисунке (N — число витков спирали). Заметим, что площадь получившегося параллелограмма $(\pi d)N \cdot l/N$ равна площади исходного покрытия $(\pi d)l$ (шириной канавок пренебрегаем). При большом числе витков N угол α можно считать малым. Если в соответствие с условием пренебречь вкладами приконтактных областей, сопротивление получившейся плёнки можно записать в виде:

$$R = \rho \frac{L}{\delta\, w}. \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Подставив сюда найденные из рисунка с помощью тригонометрических формул выражения для

$$L = \frac{\pi d\, N}{\cos\alpha} \qquad \textbf{(1 б.)}$$

и

$$w = \frac{l}{N}\cos\alpha \qquad \textbf{(1 б.)}$$

и разделив получившееся уравнение на (1), получим

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{\pi d\, N}{l\cos\alpha}\right)^2 \qquad (3)$$

и найдём

$$N = \frac{l}{\pi d}\sqrt{\frac{R}{R_0}}\cos\alpha \approx \frac{l}{\pi d}\sqrt{\frac{R}{R_0}}\,, \qquad \textbf{(2 б.)}$$

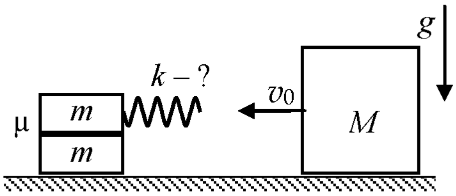
положив (с учётом малости α и необходимости округления) $\cos\alpha \approx 1$. Подставив численные значения, получим

$$\textbf{ответ: } N \approx \frac{1}{3\cdot 0.2}\sqrt{\frac{160}{1}} \approx 20\,. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Примечание1: если не пренебрегать малостью cos α, а вместо этого подставить в (3) $\cos\alpha = \frac{\pi d}{\sqrt{(\pi d)^2 + (l/N)^2}}$ и выразить N, то получим $N = \frac{l}{\pi d}\sqrt{\frac{R}{R_0} - 1}$, что после подстановки численных значений и округления приведёт к тому же ответу.

Примечание2: если в решении приведены формулы, в которых сразу положено $\cos\alpha = 1$, то такое решение считать приемлемым и оценивать так же.

4. На гладком горизонтальном столе лежат друг на друге два одинаковых бруска массой m каждый. Коэффициент трения между ними равен μ. К верхнему бруску прикреплена лёгкая пружина. На эту конструкцию со стороны пружины налетает брусок массой M со скоростью v_0. При какой максимальной жёсткости k пружины верхний брусок не сместится относительно нижнего? Пружина достаточно длинная, так что сжимается не полностью. Трения о поверхность стола нет. Ускорение свободного падения равно g.



Решение.

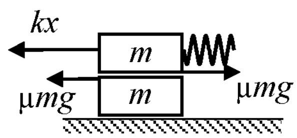
Рассмотрим момент максимального сжатия пружины x. В этот момент все бруски движутся с одинаковой скоростью. Обозначим эту скорость буквой u и запишем закон сохранения импульса для системы трёх брусков:

$$Mv_0 = (M + 2m)u\,, \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

а также закон сохранения энергии, учитывающий энергию $\frac{kx^2}{2}$ сжатой пружины:

$$\frac{Mv_0{}^2}{2} = \frac{(M+2m)u^2}{2} + \frac{kx^2}{2}. \qquad (2) \qquad \textbf{(3 б.)}$$

Максимальная сила трения между верхним и нижним брусками равна $(mg)\mu$. Запишем второй закон Ньютона для го-



ризонтальных проекций сил, действующих на верхний брусок:

$$ma_{\text{в}} = kx - \mu(mg), \qquad (3) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

где $a_{\text{в}}$ — ускорение верхнего бруска. Также запишем второй закон Ньютона для горизонтальных проекций сил, действующих на нижний брусок:

$$ma_{\text{н}} = \mu(mg), \qquad (4) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

где $a_{\text{н}}$ — ускорение нижнего бруска.

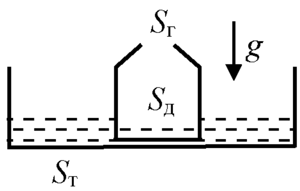
То есть, чтобы бруски не раздвинулись, ускорения нижнего и верхнего брусков должны быть одинаковы, а из (3) и (4) при искомой максимальной k должно быть:

$$2\mu(mg) = kx. \qquad (5) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Выразив u из (1), x из (5) и подставив в (2), найдём

$$\textbf{ответ: } k = 4\left(\frac{\mu g}{v_0}\right)^2 m\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{M}\right). \qquad \textbf{(2 б.)}$$

5. Садовод-любитель поставил в пустой цилиндрический таз площадью $S_{\text{т}} = 500$ см^2 пустую открытую банку массой $m = 100$ г, площадью дна $S_{\text{д}} = 50$ см^2 и горловины $S_{\text{г}} = 20$ см^2. Пошёл дождь — таз и банка начали наполняться водой. Через некоторое время стоявшая на дне банка начала вертикально всплывать. Определите, сколько осадков (высота выпавшего слоя воды в мм) выпало к этому моменту. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.



Решение.

Пусть высота выпавших осадков равна h. Это значит, что объём осадков (воды), прошедший через сечение S, равен $h{\cdot}S$. Объём воды в банке равен $h{\cdot}S_{\text{г}}$, а в тазу — $h{\cdot}(S_{\text{т}} - S_{\text{г}})$. Значит, высота воды в тазу равна

$$H = h\frac{S_{\text{т}} - S_{\text{г}}}{S_{\text{т}} - S_{\text{д}}}. \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Поскольку банка с водой начала всплывать, действующая на неё сила тяжести $(m + \rho h S_{\text{г}})g$, где $\rho = 1$ г/см^3 — плотность воды, равна силе Архимеда $\rho g V$, где $V = h\,S_{\text{д}}$ — объём вытесненной воды:

$$(m + \rho h S_{\text{г}})g = \rho g H S_{\text{д}}. \qquad (2) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Подставив сюда H из (1), найдём

$$h = \frac{m}{\rho S_т} \frac{S_т - S_д}{S_д - S_г} \qquad (3) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

и, подставив численные значения, получим

ответ: $h = \frac{100}{1 \cdot 500} \cdot \frac{450}{30} \approx 3\text{ см} = 30\text{ мм}$. **(2 б.)**