Физика   11 класс

1. Винтик и Шпунтик сделали так, что ускорение свободного падения в Цветочном городе до высоты $H = 10$ м осталось прежним, а выше оно стало вдвое меньше. Если раньше Незнайка мог подбросить мячик на высоту $h = 20$ м, то на какую высоту h' он сможет подбросить мячик теперь? Влиянием воздуха пренебречь.

Решение.

Бросая мячик, Незнайка сообщает ему некоторую кинетическую энергию, которая целиком расходуется на совершение работы против силы тяжести, поскольку, достигнув максимальной высоты, мячик останавливается. Так как в обоих случаях Незнайка сообщает мячику одинаковую энергию, то и работа силы тяжести в обоих случаях одинакова:

$$mgh = mgH + m\frac{g}{2}\left(h' - H\right), \qquad \textbf{(6 б.)}$$

где m — масса мячика, g — ускорение свободного падения на высоте меньшей 10 м.

Выразив отсюда искомую высоту

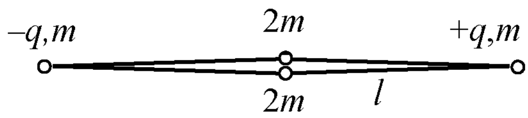
$$h' = 2h - H \qquad \textbf{(2 б.)}$$

и подставив численные значения, получим

$$\textbf{ответ: } h' = 2h - H = 30 \text{ м}. \qquad \textbf{(2 б.)*}$$

Примечание.
*Допустимы и другие рассуждения, приводящие к правильному ответу (например, из рассмотрения кинематики равноускоренного движения). Необходимо оценить их последовательность и логичность.

2. Ромб состоит из одинаковых лёгких жёстких стержней длины l, соединенных шарнирами. В вершинах ромба закреплены маленькие шарики, два из которых (противоположные друг другу) заряжены одинаковыми по величине, но разноимёнными зарядами q и $-q$ и имеют массу m каждый. Два других не заряжены и имеют массу $2m$ каждый. Вначале незаряженные шарики удерживаются вплотную друг к другу. Шарики отпускают. Определить модули скоростей шариков в момент, когда ромб принимает форму квадрата.



Решение.

Когда незаряженные шарики удерживаются вплотную друг к другу, расстояние между заряженными шариками составляет $2l$, а потенциальная энергия их взаимодействия равна:

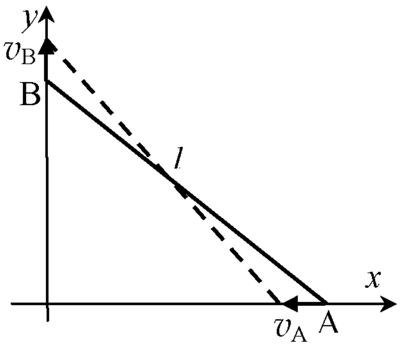
$$U_0 = -k\frac{q^2}{2l}, \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где k — коэффициент пропорциональности в законе Кулона.

Разноимённые заряды притягиваются, заставляя шарнирную конструкцию изменять форму.

Когда конструкция принимает форму квадрата, расстояние между заряженными шариками равно $\sqrt{2}l$, а энергия их взаимодействия равна:

$$U = -k\frac{q^2}{\sqrt{2}l}. \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$



Из симметрии задачи следует, что в любой момент времени противоположные шарики двигаются с одинаковыми по величине, но противоположными по направлению скоростями: заряженные шарики сближаются, а незаряженные удаляются. Рассмотрим движение одного из стержней. Один из концов стержня (точка A на рисунке) двигается горизонтально со скоростью v_A, а другой (точка B на рисунке) — вертикально со скоростью v_B. Поскольку стержень не меняет свою длину, то проекции скоростей его концов на ось стержня должны быть равны. Следовательно, когда конструкция принимает форму квадрата

$$v_A = v_B.$$

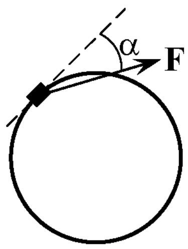
Итак, все шарики двигаются с равными по модулю скоростями v. **(1 б.)**

Запишем закон сохранения энергии:

$$2\cdot\frac{2mv^2}{2} + 2\cdot\frac{mv^2}{2} + U = U_0, \qquad (3) \qquad \textbf{(3 б.)}$$

Подставив сюда выражения (1) и (2) и выразив искомую скорость, получим

ответ: $v = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{6}\frac{kq^2}{ml}}$. **(2 б.)**



3. На тонкое закрепленное кольцо радиуса R надета небольшая шайба массой m. К шайбе приложена постоянная по величине сила F, которая всегда направлена в плоскости кольца под углом α к направлению скорости. Найти установившуюся скорость шайбы. Коэффициент трения μ $(\mu < ctg\,\alpha)$. Силой тяжести пренебречь.

Решение:

Помимо силы $\vec{F}$ на шайбу действует сила реакции $\vec{N}$ со стороны кольца, направленная по нормали к кольцу (вдоль радиуса) и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленная по касательной к кольцу противоположно скорости движения шайбы. При установившейся скорости v шайбы её ускорение $\vec{a}$ направленно к центру кольца и равно по величине

$$a = \frac{v^2}{R}, \qquad \textbf{(2 б.)}$$

а сила трения при движении равна

$$F_{\text{тр}} = N\mu\,. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Согласно второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}\,.$$

Запишем это равенство в проекции на нормаль и на касательную к кольцу в месте нахождения шайбы:

$$m\frac{v^2}{R} = F\sin\alpha \pm N\,, \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)*}$$

$$0 = F\cos\alpha - N\mu\,. \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Знак плюс в уравнении (1) соответствует силе $\vec{N}$, направленной к центру кольца, а минус — от центра. Выразив N из (2) и подставив в (1), из получившегося уравнения найдём:

$$v = \sqrt{\frac{FR}{m}\left(\sin\alpha \pm \frac{1}{\mu}\cos\alpha\right)},$$

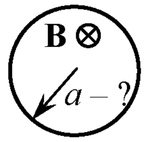
Знак минус приводит к отрицательному значению подкоренного выражения, так как, по условию, $\mu < ctg\,\alpha$. Отбросив это решение, получим

ответ: $$v = \sqrt{\frac{FR}{m}\left(\sin\alpha + \frac{1}{\mu}\cos\alpha\right)}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Примечание.

*За отсутствие упоминания о возможном знаке «–» в этом уравнении баллы не снижаются.

4. Кусок тонкой проволоки сопротивлением R свернули в замкнутое кольцо и поместили в однородное магнитное поле B_0, направленное перпендикулярно плоскости кольца. Магнитное поле уменьшают до нуля за время τ по закону: $B(t) = B_0\left(1 - t^2/\tau^2\right)$. В момент времени $t = \tau/2$ кольцо разорвалось. Каков был радиус кольца a, если известно, что проволока выдерживает максимальное натяжение T_0? Влиянием магнитного поля индуцированного тока пренебречь.



Решение:

После того, как начали уменьшать магнитное поле, поток магнитного поля через кольцо

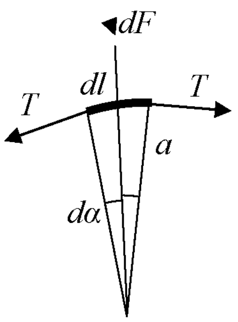
$$\Phi = \pi a^2 B \qquad \textbf{(1 б.)}$$

начал изменяться и возникла ЭДС индукции, равная

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi a^2 \frac{dB}{dt}. \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Тогда, по закону Ома, в кольце возник ток

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}. \qquad (2) \qquad \textbf{(1 б.)}$$



На каждый небольшой участок кольца dl стала действовать сила Ампера dF, направленная по радиусу от центра кольца и равная по величине

$$dF = IBdl. \qquad (3) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Рассмотрим отдельно этот небольшой участок кольца (см. рисунок). На него действуют силы натяжения T и сила Ампера dF, которые уравновешивают друг друга:

$$dF = 2T\sin d\alpha \approx 2Td\alpha.$$

Подставляя сюда (3) и учитывая, что длина дуги окружности $dl = a2d\alpha$, получим:

$$T = IBa. \qquad (4) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Подставляя (1) в (2) и полученное выражение в (4), получим:

$$T = \frac{-\pi a^2 \frac{dB}{dt}}{R} Ba. \qquad (5)$$

Кольцо порвалось в момент времени $t = \tau/2$. В этот момент времени натяжение равнялось критическому $T(\tau/2) = T_0$, магнитное поле $B(\tau/2) = \frac{3}{4}B_0$, $\frac{dB}{dt}(\tau/2) = -\frac{B_0}{\tau}$. Подставив эти значения в (5) и выразив радиус кольца, получим

ответ: $a = \sqrt[3]{\frac{4}{3\pi}\frac{T_0 R\tau}{B_0^2}}$. **(2 б.)**

5. **Задача-оценка.** Оцените изменение массы воздуха в жилой комнате при типичных колебаниях атмосферного давления, сопровождающих изменение погоды. *Предполагается, что Вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения задачи величины, выбрать их численные значения и получить численный результат.*

Решение:

Запишем закон Менделеева–Клапейрона для воздуха в комнате:

$$PV = \frac{m}{\mu}RT, \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где P, m, T, μ — соответственно давление, масса, температура и молярная масса воздуха в комнате, V — объём комнаты, а R — универсальная газовая постоянная.

При изменении погоды атмосферное давление меняется на некоторую величину ΔP, а температура в жилой комнате поддерживается примерно постоянной. Тогда в уравнении (1) меняется только давление и масса воздуха:

$$\Delta P V = \frac{\Delta m}{\mu}RT. \qquad \textbf{(4 б.)}$$

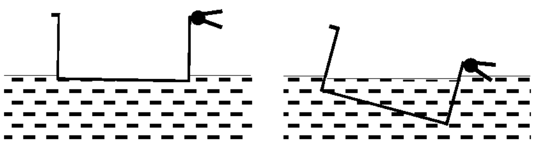
Выразив Δm, получим:

$$\Delta m = \mu\frac{\Delta P V}{RT}. \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Приняв объём комнаты $V = 6\,\text{м}\times 3\,\text{м}\times 2{,}7\,\text{м} \approx 50\,\text{м}^3$, $\Delta P = 20$ мм рт. ст. ≈ 2600 Па (например, при изменении давления от 760 до 780 мм рт. ст. при прояснениях), $T \approx 300\,\text{K}$, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К), $\mu \approx 29$ г/моль $\approx 0{,}03$ кг/моль и подставив численные значения в (2), найдём

ответ: $\Delta m \approx 1{,}5$ кг. **(2 б.)**

6. **Задача-демонстрация** (демонстрируется видеоролик). В аквариум с водой опустили лёгкий пластиковый контейнер с прикреплёнными к одному из бортиков прищепками. Контейнер плавает на воде, находясь практически в горизонтальном положении. Однако после того как в контейнер налили воду, он значительно наклонился в сторону прищепок. Объясните наблюдаемое явление.



Решение:

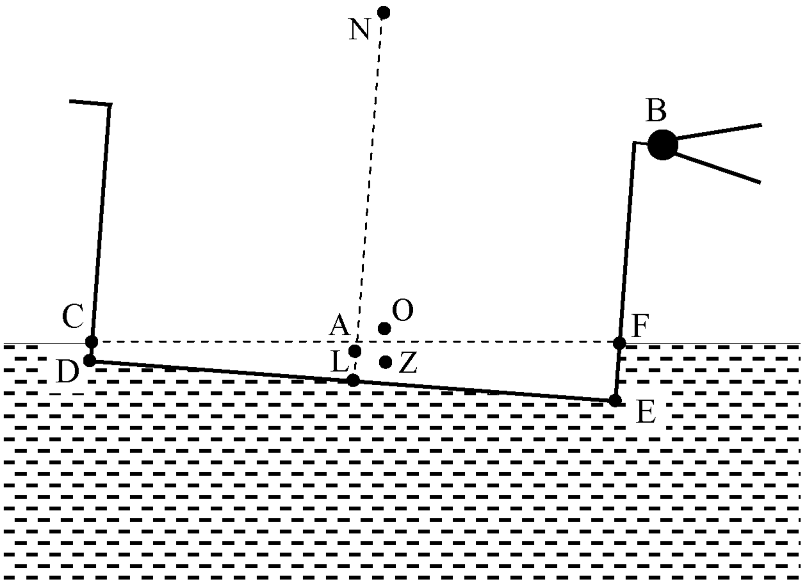
На плавающий в аквариуме контейнер с прищепками и налитой в него водой действуют: сила тяжести самого контейнера $m_к\vec{g}$, приложенная к центру масс контейнера (точка А на рисунке), сила тяжести прищепок $m_п\vec{g}$, приложенная к центру масс прищепок (точка В на рисунке), сила тяжести налитой воды $m_в\vec{g}$, приложенная к центру масс налитой воды, сила Архимеда $\vec{F}_А$, приложенная к точке, которая являлась бы центром масс погруженной части, если бы последняя была полностью заполнена водой. В равновесии сумма всех этих сил равна нулю:

$$m_к\vec{g} + m_п\vec{g} + m_в\vec{g} + \vec{F}_А = 0. \qquad \textbf{(3 б.)}$$

Обозначив $M = m_к + m_п$ и $\vec{F} = m_в\vec{g} + \vec{F}_А$, перепишем это уравнение в виде

$$M\vec{g} + \vec{F} = 0. \qquad (1)$$

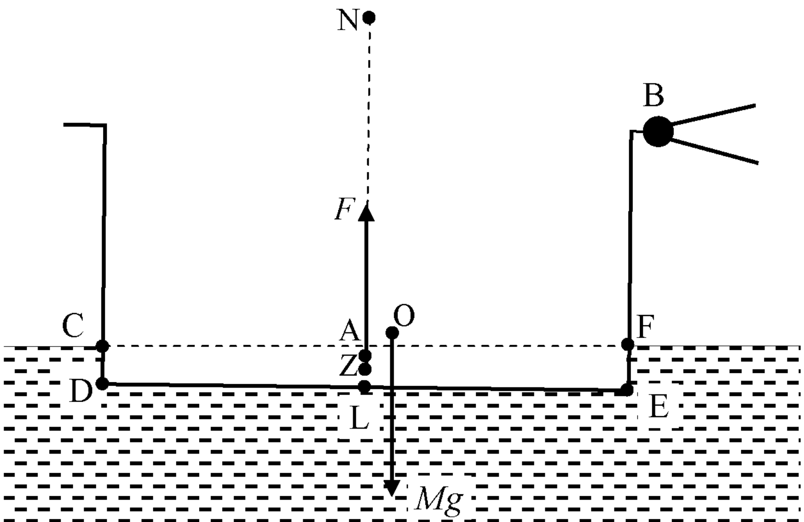
Точка O приложения силы $M\vec{g}$ лежит внутри отрезка AB ближе к точке A, так как вес контейнера больше чем вес прищепок (иначе пустой контейнер с прищепками переворачивался бы), а сила $\vec{F}$ приложена к точке Z, которая являлась бы центром масс незаполненной водой погруженной части, если её заполнить водой (центр масс четырёхугольника CDEF на рисунках). Из (1) следует, что силы $M\vec{g}$ и $\vec{F}$ по абсолютной величине одинаковы, а так как сила $M\vec{g}$ в обоих случаях (случай *а* — пустой контейнер и случай *б* — контейнер с водой) одинакова, то не меняется и сила $\vec{F}$. Иными словами, эти случаи отличаются только точками приложения силы $\vec{F}$ относительно стенок контейнера (положение точки O относительно стенок контейнера, очевидно, не меняется).



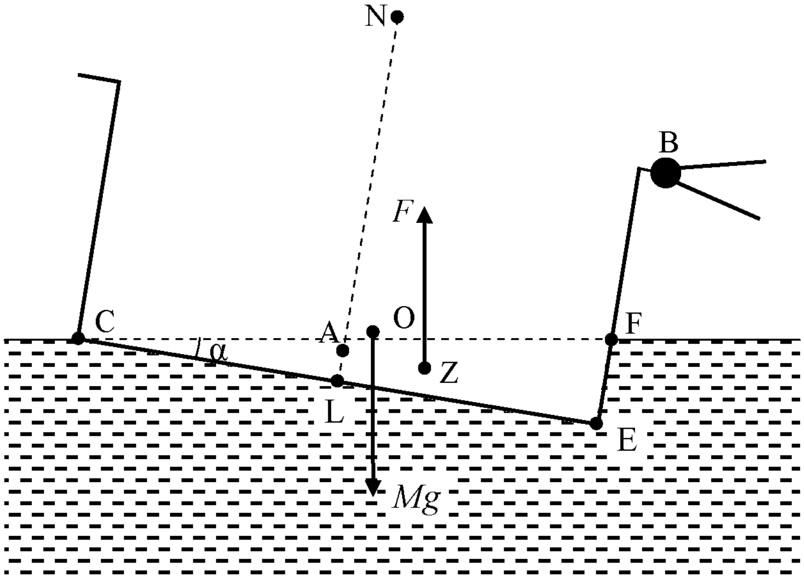
В равновесии сумма моментов всех сил равна нулю. **(3 б.)**

Это означает, что точки O и Z должны находиться на одной вертикали.

В случае *а* (пустой контейнер) если бы контейнер был ориентирован горизонтально, то точка Z находилась бы на серединной линии, а точка O была бы смещена в сторону прищепок, и в итоге создавался бы ненулевой момент (направленный по часовой стрелке на рисунке). Повернём контейнер на угол α так, что четырёхугольник CDEF превращается в треугольник CEF с точкой C в вершине контейнера. Этот угол мал, поскольку объём вытесненной воды мал по сравнению с объёмом контейнера, то есть площадь треугольника мала по сравнению с квадратом длины контейнера. При этом точка Z сильно сместится и расположится на пересечении медиан этого треугольника, то есть на расстоянии 1/3 CE от стороны EF. При таком наклоне, как видно из рисунка, возникнет момент сил, направленный в противоположную сторону (против часовой стрелки на рисунке). Значит, равновесный

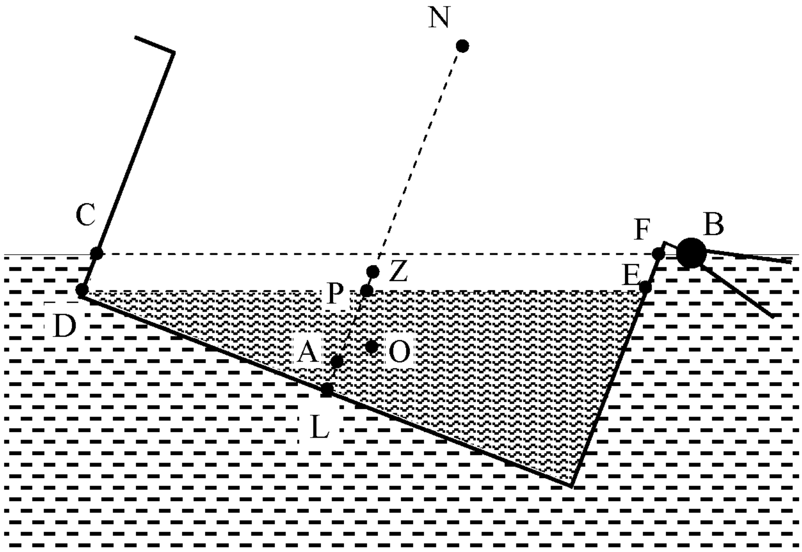


угол наклона меньше малого угла α, то есть пустой контейнер с прищепками плавает на воде, находясь практически в горизонтальном положении.



(Любые рассуждения, доказывающие, что в случае *а* угол наклона мал, оцениваются в 2 балла.) **(2 б.)**

В случае *б*, когда в аквариум налито достаточное количество воды, четырёхугольник CDEF представляет собой параллелограмм, а его центр масс лежит на серединной линии LN контейнера. Если в горизонтально стоящем контейнере уровень воды доходит до точки P на серединной линии, то угол OPL, равный примерно OZL (расстояние PZ мало, так как равно половине стороны EF



параллелограмма CDEF, площадь которого мала, а угол между сторонами конечен), будет являться углом наклона плавающего в равновесии контейнера. Из рисунка видно, что этот угол при определённом уровне налитой воды может быть больши́м. Поэтому контейнер с достаточным количеством воды значительно наклоняется в сторону прищепок.

(Любые рассуждения, доказывающие, что в случае *б* угол наклона значителен, оцениваются в 2 балла.) **(2 б.)**