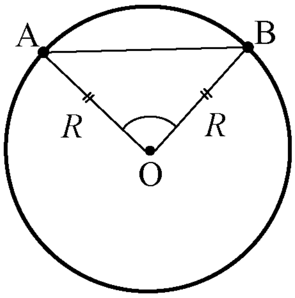
Физика 10 класс

1. Два лыжника бегут с постоянными по модулю скоростями по круговой траектории, стартовав одновременно из диаметрально противоположных точек. Через время t расстояние между ними (измеряемое по прямой как длина соединяющего их отрезка) сократилось вдвое. Через какое время после старта они встретятся?

Решение.

Пусть R — радиус окружности, вдоль которой бегут лыжники. Обозначим положения лыжников на окружности точками A и B, а центр окружности точкой O. Тогда расстояние между лыжниками можно однозначно характеризовать углом $\widehat{AOB}$ или длиной отрезка AB.



В начальный момент времени угол $\widehat{AOB}$ был равен 180°, а расстояние между лыжниками (измеряемое по прямой как длина соединяющего их отрезка AB) составляло $2R$.

В момент времени t, когда расстояние AB между лыжниками сократилось вдвое и стало равным R, треугольник AOB стал равносторонним ($AB = AO = OB = R$). При этом угол $\widehat{AOB}$ равен 60°. **(4 б.)**

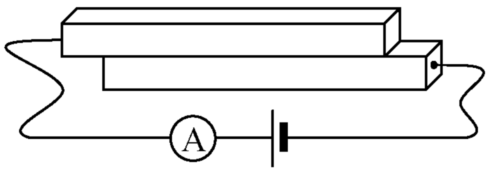
Поскольку лыжники бегут с постоянными по модулю скоростями, угол $\widehat{AOB}$ изменяется равномерно. За время t угол $\widehat{AOB}$ уменьшился на 120° (от 180° до 60°), а за искомое время t' угол $\widehat{AOB}$ изменится на 180°. Составим пропорцию

$$\frac{t'}{t} = \frac{180^\circ}{120^\circ}.$$ **(4 б.)**

Отсюда получим

ответ: $t' = \frac{3}{2}t$. **(2 б.)**

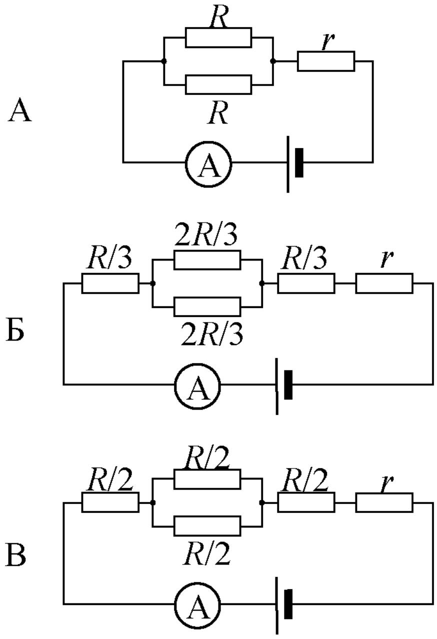
2. Два одинаковых длинных проводящих стержня прямоугольного сечения плотно прижаты друг к другу и подключены к полюсам неидеальной (обладающей некоторым внутренним сопротивлением) батареи через амперметр. Вначале края стержней совпадают (стержни соприкасаются по всей длине) и амперметр показывает $I_1 = 6$ А. Стержни начинают раздвигать вдоль длинной стороны так, что они остаются плотно прижатыми друг к другу (см. рис.). Когда длина соприкасающейся части уменьшилась до 2/3 длины стержня, показание амперметра уменьшилось до $I_2 = 4{,}5$ А. Сколько покажет амперметр, когда длина соприкасающейся части уменьшится до половины длины стержня?



Решение.

Вначале, когда края стержней совпадали, их сопротивления были включены параллельно (рис. А), поэтому их общее сопротивление было равно $R/2$, где R — сопротивление одного стержня. Поэтому, согласно закону Ома для всей цепи,

$$\varepsilon = I_1\left(\frac{R}{2}+r\right), \qquad (1) \quad \textbf{(2 б.)}$$



где ε — ЭДС батареи, r — её внутреннее сопротивление. Когда длина соприкасающейся части уменьшилась до 2/3 длины стержня, цепь содержит параллельно включенные участки стержней сопротивлением $(2/3)R$, которые соединены последовательно с оставшимися двумя участками стержней сопротивлением $R/3$ (рис. Б). В этом случае закон Ома для всей цепи имеет вид

$$\varepsilon = I_2\left(\frac{R}{3}+\frac{1}{2}\frac{2R}{3}+\frac{R}{3}+r\right),$$

то есть

$$\varepsilon = I_2\left(R+r\right). \qquad (2) \quad \textbf{(2 б.)}$$

Аналогично, когда длина соприкасающейся части уменьшится до половины длины стержня, эквивалентная схема цепи будет иметь вид, показанный на рис. В, а закон Ома приобретёт вид

$$\varepsilon = I_x\left(\frac{R}{2}+\frac{1}{2}\frac{R}{2}+\frac{R}{2}+r\right)$$

(где I_x — искомое показание амперметра), то есть

$$\varepsilon = I_x\left(\frac{5R}{4}+r\right). \qquad (3) \quad \textbf{(2 б.)}$$

Приравняв правые части равенств (1) и (2), получим:

$$I_1\left(\frac{R}{2}+r\right) = I_2\left(R+r\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{r} = \frac{2(I_1-I_2)}{2I_2-I_1}. \qquad (4)$$

Приравняв правые части равенств (1) и (3), получим:

$$I_1\left(\frac{R}{2}+r\right) = I_x\left(\frac{5R}{4}+r\right) \quad \Rightarrow \quad I_x = I_1\cdot 2\frac{\frac{R}{r}+2}{5\frac{R}{r}+4}.$$

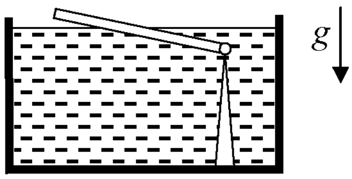
Подставив сюда (4), найдём

$$I_x = \frac{2I_1 I_2}{3I_1 - I_2}.$$

Подставив численные значения, получим

ответ: $I_x = 4$ А. **(4 б.)**

3. Тонкая палочка шарнирно прикреплена к вертикальной стойке в бассейне с водой, так что уровень воды немного выше шарнира. При этом палочка погружена в воду на 3/5 длины. На какую часть длины будет погружена палочка, если слить часть воды, так что уровень воды станет немного ниже шарнира?



Решение.

Пусть ρ_0 — плотность воды, ρ — плотность палочки, S — площадь её поперечного сечения, а l — её длина. Равенство моментов сил относительно шарнира в случае, когда уровень воды выше шарнира и палочка погружена на $x = 3/5$ длины, имеет вид:

$$\rho S l g \cdot \frac{l}{2}\cos\alpha = \rho_0 S x l g \cdot \frac{xl}{2}\cos\alpha,$$

где α — угол наклона палочки к горизонту. Сокращая одинаковые множители, получаем:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = x^2. \qquad (1)$$ **(3 б.)**

В случае, когда уровень воды станет ниже шарнира, равенство моментов сил относительно шарнира примет вид:

$$\rho S l g \cdot \frac{l}{2}\cos\beta = \rho_0 S y l g \cdot l\left(1 - \frac{y}{2}\right)\cos\beta,$$

где β — угол наклона палочки к горизонту, y — искомая погруженная часть палочки.

Сокращая одинаковые множители, получаем:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = y \cdot (2 - y). \qquad (2)$$ **(3 б.)**

Приравняв правые части (1) и (2), получим квадратное уравнение

$$y^2 - 2y + x^2 = 0,$$ **(2 б.)**

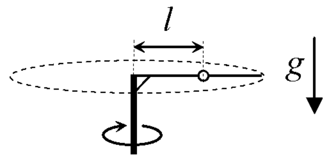
которое имеет два действительных корня

$$y = 1 \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Исключив один из корней, не удовлетворяющий условию $y < 1$, и подставив $x = 3/5$, получим

ответ: $y = 1 - \sqrt{1 - x^2} = \dfrac{1}{5}$. **(2 б.)**

4. Спицу вращают в горизонтальной плоскости вокруг одного из концов с линейно возрастающей со временем угловой скоростью $\omega = \varepsilon t$. На спицу надета бусинка на расстоянии l от оси вращения. В какой момент времени t_x бусинка сорвется с места, если коэффициент трения равен μ? Ускорение свободного падения равно g.



Решение.

На бусинку действует сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Запишем второй закон Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a}. \qquad (1)$$

Поскольку бусинка вращается по окружности с возрастающей угловой скоростью, то её ускорение $\vec{a}$ можно представить в виде суммы центростремительного ускорения $\vec{a}_{\text{ц.с.}}$, которое направлено вдоль спицы в сторону оси вращения, и тангенциального ускорения $\vec{a}_{\tau}$, направленного поперёк спицы, вдоль скорости:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{ц.с.}} + \vec{a}_{\tau}.$$

Поскольку спицу вращают с угловой скоростью ω, бусинка движется по окружности с линейной скоростью

$$\omega l = \varepsilon l t,$$

а её тангенциальное ускорение равно:

$$a_{\tau} = \varepsilon l. \qquad (2)$$ **(2 б.)**

Центростремительное ускорение выражается через угловую скорость бусинки формулой

$$a_{\text{ц.с.}} = \omega^2 l = (\varepsilon t)^2 l. \qquad (3)$$ **(2 б.)**

Запишем равенство сил (1) в проекции на ось спицы:

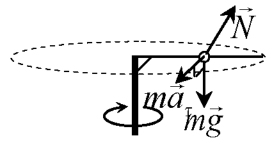
$$F_{\text{тр}} = m a_{\text{ц.с.}}. \qquad (4)$$

В момент отрыва бусинки:

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \qquad (5)$$ **(1 б.)**

Теперь запишем равенство сил (1) в проекции на плоскость, перпендикулярную оси спицы:

$$m\vec{g}+\vec{N}=m\vec{a}_\tau,$$



Учитывая, что ускорение свободного падения и тангенциальное ускорение взаимно перпендикулярны (см. рис.), силу реакции опоры N найдём по теореме Пифагора:

$$N=m\sqrt{g^2+a_\tau^2}\,. \qquad (6) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

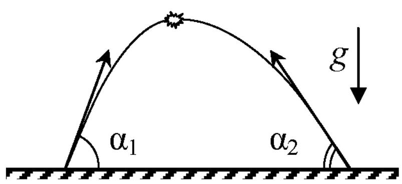
Из уравнений (2) – (6), получим:

$$\mu m\sqrt{g^2+(\varepsilon l)^2}=m(\varepsilon t_x)^2 l\,. \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Выражая отсюда искомое время t_x, получим

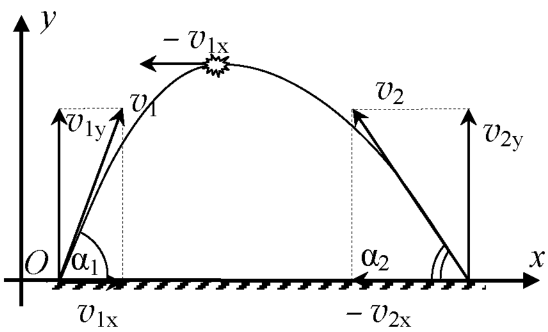
$$\textbf{ответ: } t_x=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}\sqrt{1+\left(\frac{g}{\varepsilon l}\right)^2}}\,. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

5. Два тела разных масс бросают с горизонтальной поверхности навстречу друг к другу под углами α_1 и α_2 к горизонту. Тела столкнулись и, слипшись после столкновения, упали в точку, откуда было брошено первое тело. Найти отношение m_1/m_2 масс тел, если известно, что в момент столкновения скорости обоих тел были горизонтальны.



Решение.

Направим ось Оx горизонтально, а ось Оy — вертикально. Обозначим начальные скорости первого и второго тела v_1 и v_2, соответственно.



По условию известно, что оба тела, слипшись, упали в точку, из которой было брошено первое тело, следовательно, после столкновения их скорость равна по величине и противоположна по направлению скорости первого тела непосредственно перед столкновением. **(2 б.)**

Учитывая также, что скорости в момент столкновения были горизонтальны, запишем закон сохранения импульса для двух тел до и после столкновения в проекции на горизонтальную ось:

$$m_1 v_{1x}+m_2 v_{2x}=-(m_1+m_2)v_{1x}\,. \qquad (1) \qquad \textbf{(3 б.)}$$

У тела, брошенного под углом к горизонту, скорость становится горизонтальной в точке максимального подъёма. По условию, скорости тел в момент столкновения были горизонтальны, следовательно, оба тела в этот момент достигли максимальной высоты. Максимальная высота определяется вертикальной компонентой начальной скорости тела. Оба тела достигли одинаковой максимальной высоты, следовательно, вертикальные компоненты их начальных скоростей были равны:

$$v_{1y} = v_{2y}. \qquad (2) \qquad \textbf{(3 б.)}$$

Из равенств (1) и (2), учитывая, что $v_{1y}/v_{1x} = \operatorname{tg}\alpha_1$, $v_{2y}/v_{2x} = \operatorname{tg}\alpha_2$, получим

ответ: $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} - 1\right).$ **(2 б.)**