1. Два резистора соединили параллельно и измерили результирующее сопротивление. Затем эти же резисторы соединили последовательно и снова измерили сопротивление. В первом случае измерительный прибор показал 1,23 Ом, во втором случае 4,56 МОм. Чему равны сопротивления резисторов?

Решение.

По условию задачи, сопротивление последовательно соединённых резисторов более чем в миллион раз больше сопротивления тех же резисторов, соединённых параллельно. Это возможно только в том случае, когда сопротивление одного из резисторов (R) много больше сопротивления другого (r):

$$R \gg r. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Когда резисторы соединены параллельно, почти весь ток течёт через резистор с меньшим сопротивлением (r). Поэтому сопротивление всей цепи (1,23 Ом) почти не зависит от наличия второго резистора и приблизительно равно r:

$$r \approx 1{,}23\ \text{Ом}. \qquad (1)$$

При последовательном соединении резисторов результирующее сопротивление равно $R+r$:

$$R + r = 4{,}56\ \text{МОм}.$$

В последнем равенстве можно пренебречь меньшим сопротивлением r, так как его величина заведомо меньше погрешности измерительного прибора (равной 0,01 МОм в данном случае):

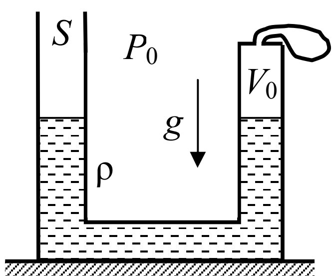
$$R = 4{,}56\ \text{МОм}. \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Сопротивления резисторов различаются более чем в миллион раз. Поэтому в случае параллельного соединения через больший резистор протекает менее чем миллионная доля полного тока. Следовательно, погрешность в приближённом равенстве (1) не превышает 1/1.000.000, т. е. заведомо меньше погрешности прибора. Это значит, что все значащие цифры в (1) достоверны:

$$r = 1{,}23\ \text{Ом}. \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Ответ: 1,23 Ом, 4,56 МОм.

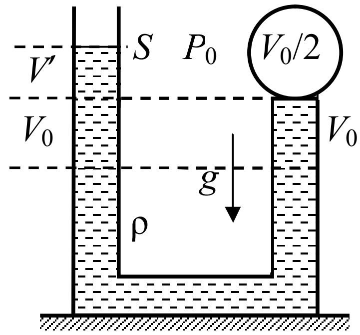
(**Примечание.** Задача может быть решена и более «привычным» способом — нахождением r и R из системы уравнений $rR/(r+R) = 1{,}23$ Ом, $r + R = 4{,}56 \cdot 10^6$ Ом. В этом случае за правильную запись каждого из этих уравнений начисляется по 2 балла. Правильно решённая задача оценивается в 10 баллов. Если же, при правильном решении, в ответе приведены «лишние» значащие цифры, то за это снимается 1 балл.)



2. Трубка площадью сечения S, имеющая форму сообщающихся сосудов, частично заполнена водой плотностью ρ. На правое колено трубки надет сдутый резиновый шарик. Объём воздуха между шариком и поверхностью жидкости в правом колене равен V_0. В левое колено трубки долили воды так, что шарик надулся до объёма $V_0/2$, при этом давление в шарике достигло значения $2P_0$, где P_0 — атмосферное давление. Определите объём воды, долитой в левое колено трубки. Ускорение свободного падения равно g. Капиллярными явлениями пренебречь. Температуру считать постоянной.

Решение:

В результате доливания воды в левое колено трубки шарик надулся до объёма $V_0/2$, при этом давление в шарике достигло значения $2P_0$. Заметим, что произведение давления на объём газа в шарике совпадает с произведением давления на объём газа, который изначально был заключён между шариком и поверхностью воды:



$$2P_0 \cdot \frac{V_0}{2} = P_0 V_0,$$

тогда очевидно, что весь воздух, изначально заключённый между поверхностью жидкости и шариком, останется только в шарике, а левое колено трубки полностью заполнится водой. **(4 б.)**

Так как давление газа в шарике больше атмосферного, то уровень воды в левом колене будет выше, чем в правом. Следовательно, объём долитой воды равен:

$$V = 2V_0 + V', \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

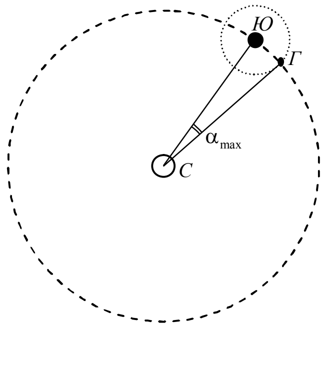
где V' — объём воды в левом колене, находящейся выше уровня воды в правом колене. Его давление уравновешивается давлением газа в шарике:

$$P_0 + \rho g \frac{V'}{S} = 2P_0 \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Выразив отсюда V' и подставив в (1), найдём: $V = \dfrac{SP_0}{\rho g} + 2V_0$. **(2 б.)**

Ответ: $V = \dfrac{SP_0}{\rho g} + 2V_0$.

3. Юпитер совершает оборот вокруг Солнца за 4300 суток. Ганимед (спутник Юпитера) совершает оборот вокруг Юпитера за 7,2 суток. Максимальный угол Юпитер–Солнце–Ганимед (α_{max}) равен 0,0014 радиан. Определите по этим данным, во сколько раз масса Солнца больше массы Юпитера. Все орбиты считать круговыми.



Решение.

Согласно закону всемирного тяготения, сила притяжения $F_{ЮС}$ Юпитера к Солнцу равна

$$F_{ЮС} = G\frac{M_Ю M_С}{R_{ЮС}^2}, \qquad (1) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

где G — гравитационная постоянная, $M_Ю$ и $M_С$ — массы Юпитера и Солнца, $R_{ЮС}$ — расстояние Юпитер—Солнце. По второму закону Ньютона, эта сила равна произведению массы Юпитера на его центростремительное ускорение:

$$F_{ЮС} = M_Ю\frac{v_Ю^2}{R_{ЮС}}, \qquad (2) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

где $v_Ю$ — скорость движения Юпитера относительно Солнца. Выразим из (1) и (2) массу Солнца:

$$M_С = \frac{v_Ю^2 R_{ЮС}}{G}. \qquad (3) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Таким же способом можно выразить массу Юпитера через параметры орбиты Ганимеда — расстояние $R_{ГЮ}$ между Ганимедом и Юпитером и скорость $v_Г$ движения Ганимеда относительно Юпитера:

$$M_Ю = \frac{v_Г^2 R_{ГЮ}}{G}. \qquad (4) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Разделим (3) на (4):

$$\frac{M_С}{M_Ю} = \left(\frac{v_Ю}{v_Г}\right)^2 \frac{R_{ЮС}}{R_{ГЮ}}. \qquad (5) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Так как скорость движения по окружности равна $2\pi R/T$ (R — радиус орбиты, T — период обращения), то

$$\frac{v_Ю}{v_Г} = \frac{R_{ЮС}/T_Ю}{R_{ГЮ}/T_Г}, \qquad (6)$$

где $T_Ю$ и $T_Г$ — периоды обращения Юпитера и Ганимеда. Отношение радиусов орбит равно максимальному углу Юпитер–Солнце–Ганимед α_{max}:

$$\frac{R_{ГЮ}}{R_{ЮС}} = \alpha_{\max}. \qquad (7) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

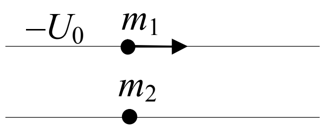
Подставив (6) и (7) в (5), найдём искомое выражение для отношения масс $M_С/M_Ю$:

$$\frac{M_C}{M_{Ю}} = \left(\frac{T_Г}{T_{Ю}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\alpha_{\max}^3}.$$ **(2 б.)**

Подставив числовые значения $T_Г$=7,2 сут., $T_{Ю}$=4300 сут., $\alpha_{\max}$=0,0014, найдём: $M_C/M_{Ю} \approx 1000$.

Ответ: масса Солнца больше массы Юпитера в ≈ 1000 раз. **(2 б.)**

(**Примечание:** вместо формулы $a = v^2/R$ для центростремительного ускорения можно воспользоваться формулой $a = \omega^2 R$. В этом случае назначение баллов производится аналогичным образом.)



4. На двух бесконечных параллельных спицах покоятся разноимённо заряженные маленькие бусинки массой m_1 и m_2. Энергия их электростатического взаимодействия равна ($-$ U_0). Бусинке массы m_1 сообщают такую начальную скорость, что она уходит от второй бусинки на бесконечность. Какую максимальную скорость при этом может приобрести вторая бусинка? Трения нет.

Решение.

Рассмотрим движение бусинок в системе отсчёта, связанной с их центром масс. Разобьём путь, пройденный 2-й бусинкой относительно центра масс, на малые отрезки $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots$ Пусть Δv_n — изменение скорости 2-й бусинки при прохождении n-го отрезка. Согласно 2-му закону Ньютона,

$$\Delta v_n = \frac{F_{x,n}}{m_2}\Delta t_n = \frac{F_{x,n}}{m_2}\frac{\Delta x_n}{|v_n|}, \qquad (1)$$

где $F_{x,n}$ — горизонтальная составляющая силы притяжения к 1-й бусинке, Δt_n — время прохождения 2-й бусинкой участка Δx_n, а v_n — её скорость в это время (относительно центра масс).

Ограничимся рассмотрением случая, когда бусинки расходятся на бесконечность относительно друг друга. Скорость $|v_n|$ будет тем меньше, чем меньше начальные (а значит, и конечные) скорости бусинок. Минимальное значение $|v_n|$ достигается, если скорости бусинок на бесконечном удалении друг от друга обращаются в ноль. В то же время величина $F_{x,n}$ не зависит от скоростей бусинок, т. к. определяется только их расположением относительно центра масс. Поэтому, согласно (1), изменение скорости Δv_n оказывается максимальным в том случае, когда скорости бусинок относительно центра масс обращаются в ноль на бесконечности.

Суммарное изменение скорости 2-й бусинки,

$$\Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3 + \ldots, \qquad (2)$$

равно разности между её конечной и начальной скоростью. Эта разность не зависит от выбора системы отсчёта. В лабораторной системе отсчёта начальная скорость 2-й бусинки равна нулю, а значит, её конечная скорость равна сумме (2). Если конечные скорости обеих бусинок одинаковы (т. е. конечные скорости относительно центра масс равны нулю), то каждое слагаемое в (2) максимально, согласно приведённому выше рассмотрению.

Итак, максимальную скорость 2-я бусинка приобретает в том случае, когда конечные скорости обеих бусинок одинаковы. **(4 б)**

Обозначим эти одинаковые скорости буквой v и запишем законы сохранения энергии и импульса в лабораторной системе отсчёта:

$$\frac{m_1 v_0^2}{2} - U_0 = \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2}, \qquad (3) \qquad \textbf{(2 б)}$$

$$m_1 v_0 = m_1 v + m_2 v, \qquad (4) \qquad \textbf{(2 б)}$$

где v_0 — начальная скорость первой бусинки. Выразив её из уравнения (4) и подставив в (3), найдём: $v = \sqrt{\dfrac{2m_1 U_0}{(m_1 + m_2) m_2}}$. **(2 б)**

Ответ: $v = \sqrt{\dfrac{2m_1 U_0}{(m_1 + m_2) m_2}}$.

5. Оцените количество электроэнергии в киловатт-часах, которую должен использовать подъемный кран, чтобы построить кирпичный пятиэтажный дом.

Решение.

Считаем, что высота одного этажа 3 м. Тогда стандартный объём пятиэтажного дома:

$$V = 100\text{м} \times 10\text{м} \times 15\text{м} = 1{,}5 \times 10^4 \text{м}^3. \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Объём стен в стандартной комнате 5×3 м^2:

$$V_{стен} = 3\text{м} \times (3\text{м} \times 0{,}4\text{м} + 13\text{м} \times 0{,}1\text{м} \times \frac{1}{2}) \approx 6\text{м}^3,$$

тогда отношение объёма стен к объёму всего дома:

$$\frac{6\text{м}^3}{3 \times 3 \times 5\text{м}^3} = \frac{2}{15}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Плотность кирпича примерно равна 3000кг/м^3**(1 б.)**. Тогда масса всех стен дома равна:

$$M_{стен} = 3000 \times 1{,}5 \times 10^4 \times \frac{2}{15} = 6 \times 10^6 \text{кг}.$$

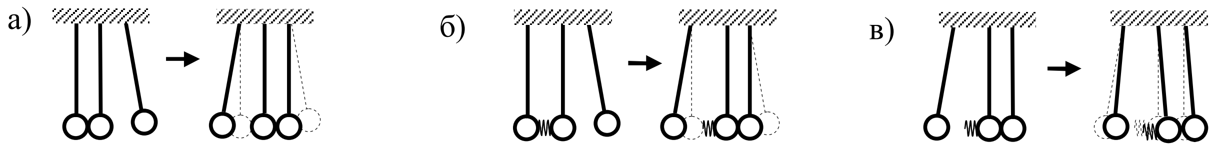
Высота центра масс дома 7.5 м **(1 б.)**, тогда потенциальная энергия подъёма его массы на эту высоту:

$$U = 6\times10^{6}\times10\times7{,}5 = 4{,}5\times10^{8}\,\text{Дж}. \qquad \textbf{(3 б.)}$$

Учитывая, что 1 кВт-час = 3600×1000 Дж,
Получим: $U \approx 125$ кВт-час. **(2 б.)**

Ответ: 125 кВт-час.

6. Задача-демонстрация. Маятник Ньютона состоит из трёх одинаковых металлических шариков, подвешенных на нитях так, что шарики могут отклоняться в одной плоскости. В положении равновесия нити вертикальны, а шарики касаются



друг друга. Если отвести правый шарик в сторону и отпустить, то после удара средний и правый шарики останутся на месте, а левый отклоняется влево. Установим лёгкую пружину между левым и средним шариками, прикрепив её к среднему шарику. Отведём правый шарик в сторону и отпустим. После первого удара средний шарик остаётся на месте, а левый отклоняется. То есть поведение системы такое же, как и в отсутствие пружины. Теперь отведём левый шарик в сторону и отпустим. После удара поведение системы резко изменилось: левый шарик отклонился влево, а средний и правый шарики вместе отклонились вправо. Объясните наблюдаемое явление.

Решение.

Обозначим шарики слева направо цифрами 1, 2, 3.

Одинаковые шарики после упругого лобового удара обмениваются скоростями. **(2 б)**

Это утверждение согласуется с законами сохранения энергии и импульса и становится очевидным, если его рассмотреть в системе центра масс. Время соударения шариков, не разделённых пружиной, мало́ настолько, что они практически не успевают сместиться за это время и вовлечь во взаимодействие другие шарики, так что взаимодействия шариков происходят последовательно: пока два соседних шарика обмениваются скоростями, остальные не участвуют в процессе. В случае а) сначала скоростями обмениваются шарики 3 и 2 (шарик 2 приобретает скорость 3-го, а шарик 3 останавливается) и сразу после этого обмениваются скоростями шарики 2 и 1, что и приводит к наблюдаемому отклонению шарика 1 при покоящихся шариках 3 и 2. (При наличии длинной цепочки шариков такой процесс напоминал бы распространение упругой волны.)

Наличие пружины резко увеличивает время взаимодействия разделённых ею шариков. **(3 б)**

Однако удар остаётся лобовым и упругим и, как и в отсутствии пружины, приводит к обмену скоростей одинаковых сталкивающихся шариков. **(2 б)**

Поэтому, в случае б) поведение шаров похоже на случай а). Действительно, сначала шары 3 и 2 быстро обмениваются скоростями, и только после этого взаимодействуют шары 2 и 1. И хотя последнее взаимодействие медленное, оно происходит при небольшом отклонении шарика 2 влево, так что шарик 3 не участвует в этом взаимодействии. Поэтому, шарики 2 и 1 обмениваются скоростями, как если бы шарика 3 вовсе не было.

В случае в) вначале взаимодействуют шарики 1 и 2, разделённые пружиной. Это взаимодействие медленное. В процессе этого взаимодействия шарик 2 существенно смещается вправо и толкает шарик 3. Скорости и ускорения шаров 2 и 3 при этом одинаковы, то есть они участвуют во взаимодействии как одно тело. Таким образом, в этом случае задача эквивалентна задаче об упругом лобовом столкновении движущегося шарика массы m с покоящимся шариком массы $2m$. Поскольку массы теперь не равны, обмена скоростями не будет. Рассмотрим это столкновение в системе центра масс. Пусть скорость этой системы равна v (направлена вправо). Тогда скорость шарика массой $2m$ равна $-v$, а скорость шарика массы m равна $2v$ (чтобы суммарный импульс был равен нулю). После соударения скорости шариков поменяются на противоположные. Действительно, при этом суммарный импульс останется равным нулю и, очевидно, закон сохранения энергии также выполнится. В лабораторной системе скорости шаров массой $2m$ и m станут равны: $-(-v)+v=2v$ (вправо) и $-2v+v=-v$ (влево). То есть, шарик 1 отразится влево, а шарики 2 и 3 отскочат вместе вправо с вдвое большей по отношению к нему скоростью, что и наблюдается экспериментально. **(3 б)**