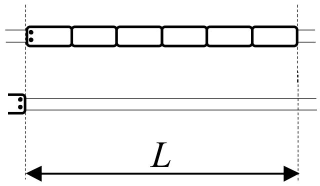


1. В момент времени, когда поезд метро отправляется со станции налево, справа на станцию въезжает другой поезд, движущийся в противоположном направлении. Определить, на каком расстоянии от левого края станции встретятся хвост отправляющегося поезда и голова прибывающего, считая, что вдоль станции поезда двигаются равноускоренно с равными по модулю ускорениями, а длина поездов одинакова и равна длине станции L.

Решение:

Оба поезда двигаются равноускоренно, с равными по модулю и направлению ускорениями. **(2 б.)**

Направим ось OX вдоль станции слева направо, а за начало отсчёта выберем левый край станции, тогда голова прибывающего поезда движется по закону:

$$x_1(t) = v_0 t - \frac{at^2}{2}, \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

а хвост отъезжающего — по закону:

$$x_2(t) = L - \frac{at^2}{2}. \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим:

$$v_0 t = L.$$

Выразив отсюда время встречи t, и подставив в (2), найдём:

$$x = L - \frac{aL^2}{2v_0^2}. \qquad (3)$$

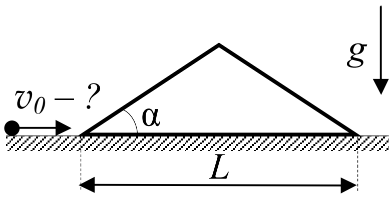
В момент времени, когда голова прибывающего поезда достигнет правого края станции, поезд остановится — конечная скорость станет равной нулю, поэтому можно написать:

$$L = \frac{v_0^2}{2a}. \qquad (4) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Из уравнений (3) и (4), найдём: $x = \frac{3}{4}L$. **(2 б.)**

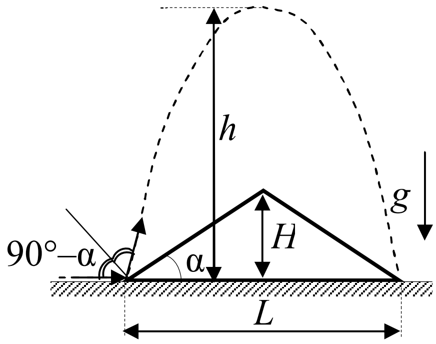
Ответ: $x = \frac{3}{4}L$.

2. Скользящий по горизонтальной поверхности маленький шарик упруго соударяется с закреплённым препятствием, сечение которого представляет собой равнобедренный треугольник с основанием L и углом при основании $\alpha = 30°$. При какой минимальной скорости шарик перелетит через препятствие, больше не соударяясь с ним? Ускорение свободного падения g. Влиянием воздуха пренебречь.



Решение:

Угол между направлением начальной скорости и перпендикуляром, опущенным на поверхность препятствия в точке соударения равен $90°–\alpha$. Отразившись упруго от поверхности препятствия, шарик полетит под углом 2α к горизонту с начальной скоростью, равной по модулю скорости до удара. **(2 б.)**



Тело, брошенное под углом 2α к горизонту, в поле тяжести движется по параболической траектории. При этом дальность полёта равна:

$$l = \frac{v_0^2 \sin 4\alpha}{g}. \qquad (1)$$ **(2 б.)**

Шарик перелетит через препятствие, больше не соударяясь с ним, при условии:

$$l > L.$$

Подставляя сюда выражение (1), найдём минимальную скорость:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gL}{\sin 4\alpha}}. \qquad (2)$$ **(2 б.)**

Убедимся в том, что при таком движении, шарик не ударится о препятствие. Проверим, что максимальная высота, на которую поднимется шарик, больше высоты препятствия.

Высота препятствия равна:

$$H = \frac{L}{2}\mathrm{tg}\alpha,$$

а максимальная высота, на которую поднимется шарик, равна:

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 2\alpha}{2g}.$$

Подставляя сюда выражение для скорости из (2), получим:

$$h = \frac{L}{4}\mathrm{tg}2\alpha .$$

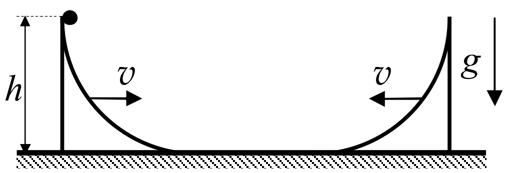
Легко убедиться, что при угле α < 45°:

$$h > H .$$

Это означает, что при угле α = 30° шарик не ударится о препятствие. **(2 б.)**

Подставляя значение угла α = 30° в выражение (2), найдём: $v_0 = \sqrt{\frac{2gL}{\sqrt{3}}}$. **(2 б.)**

Ответ: $v_0 = \sqrt{\frac{2gL}{\sqrt{3}}}$.



3. Шарик соскальзывает по склону левого клина высоты *h*, затем поднимается по склону правого клина (см. рис.). На какую максимальную высоту он в результате подпрыгнет, если клинья движутся навстречу друг другу с одинаковыми по величине постоянными скоростями v? Боковые поверхности клиньев представляют собой в сечении четверти окружностей одинакового радиуса. Клинья не успевают столкнуться, пока шарик движется по ним.

Решение:

Сначала перейдём в систему отсчёта левого клина. Из закона сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mv_{0\text{л}}{}^2}{2} .$$

выразим скорость, которую приобретёт шарик в системе отсчёта левого клина после того, как шарик скатится с него:

$$v_{0\text{л}} = \sqrt{2gh} . \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Теперь перейдём в систему отсчёта правого клина. Начальная скорость шарика, т.е. скорость, которую имеет шарик в момент времени, когда шарик встретится с правым клином, в этой системе отсчёта равна:

$$v_{0\text{п}} = v_{0\text{л}} + 2v = \sqrt{2gh} + 2v . \qquad (1) \qquad \textbf{(3 б.)}$$

Из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_{0п}{}^2}{2} = mgH .$$

определим максимальную высоту, на которую поднимется шарик:

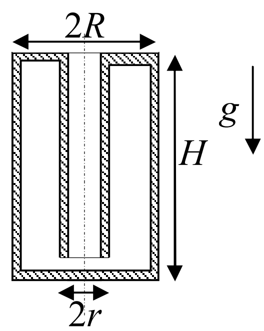
$$H = \frac{v_{0п}{}^2}{2g} . \qquad \textbf{(3 б.)}$$

Подставляя сюда выражение (1) для скорости, найдём:

$$H = \frac{\left(\sqrt{2gh} + 2v\right)^2}{2g} . \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Ответ: $H = \dfrac{\left(\sqrt{2gh} + 2v\right)^2}{2g}$.

4. Чернильница представляет собой фигуру вращения, сечение которой изображено на рисунке. Какой объем чернил можно в неё налить? Радиусы внешней и внутренней цилиндрических поверхностей равны R и r соответственно. Чернильница стоит вертикально, наполняют её медленно. Плотность чернил ρ, ускорение свободного падения g атмосферное давление P_0, высота чернильницы H. Зазор снизу между дном и внутренним цилиндром незначительный. Толщиной стенок пренебречь.



Решение.

Так как чернила наливают медленно, то температуру воздуха в чернильнице можно считать постоянной. Когда начинают наливать чернила, воздух в промежутке между цилиндрами начинает сжиматься, а его давление увеличиваться в соответствии с законом Бойля — Мариотта:

$$P_0 HS = P(H - h)S , \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где $S = \pi(R^2 - r^2)$, h — высота столба жидкости, находящейся между цилиндрами, а P — давление воздуха, находящегося между цилиндрами после того, как налили чернила. Это давление уравновешивается столбом жидкости, находящейся во внутреннем цилиндре:

$$P = P_0 + \rho g(H - h). \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Сравнивая (1) и (2), найдём:

$$P_0 \frac{H}{(H-h)} = \rho g(H - h) + P_0. \qquad (3) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

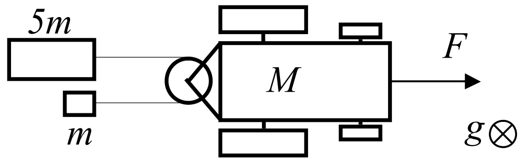
Решая (3) относительно *h* найдём:

$$h = H + \frac{P_0}{2\rho g} \pm \sqrt{\frac{P_0}{\rho g}(H + \frac{P_0}{4\rho g})}. \qquad (4) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Учитывая, что $h < H$, выбираем знак “–”. Теперь, вычислив объём, получим: $V = \pi r^2 H + \pi\left(R^2 - r^2\right)\left(H + \frac{P_0}{2\rho g} - \sqrt{\frac{P_0}{\rho g}\left(H + \frac{P_0}{4\rho g}\right)}\right)$. **(2 б.)**

Ответ: $V = \pi r^2 H + \pi\left(R^2 - r^2\right)\left(H + \frac{P_0}{2\rho g} - \sqrt{\frac{P_0}{\rho g}\left(H + \frac{P_0}{4\rho g}\right)}\right)$.

5. Два бруска массы m и $5m$, связанные тонкой лёгкой нитью, покоятся на столе. Нить слегка натянута и перекинута через лёгкий блок, закреплённый сзади у игрушечного трактора массы M (на рисунке вид сверху). Трактор снабжён колёсами, поэтому силой трения между ним и полом можно пренебречь. Коэффициент трения между брусками и полом равен μ. Какую минимальную горизонтальную силу F_1 надо приложить к трактору, чтобы он мог двигаться? При какой минимальной горизонтальной силе F_2 будут двигаться оба бруска? Ускорение свободного падения g.



Решение.

Трактор начнёт двигаться, когда начнёт двигаться маленький брусок, а большой брусок будет всё ещё стоять на месте. Учитывая, что $F_{тр}=\mu N$, а $N=mg$ **(1 б.)**, запишем второй закон Ньютона для трактора и маленького бруска:

$$\begin{cases} F_1 - 2T = 0 \\ T - \mu mg = 0 \end{cases}, \qquad (1) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

где T — сила натяжения нити. Решая (1), найдём: $F_1 = 2\mu mg$ **(1 б.)**.

Запишем второй закон Ньютона для трактора, маленького бруска и большого бруска в момент, когда начнут двигаться оба бруска:

$$\begin{cases} F_2 - 2T = Ma_1 \\ T - \mu mg = ma_2 \\ T - 5\mu mg = 0 \end{cases}. \qquad (2) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Решая (2), и учитывая, что $a_2=2a_1$**(2 б.)**, получим: $F_2=2\ \mu g(5m+M)$ **(1 б.)**.

Ответ: $F_1=2\mu mg$; $F_2=2\ \mu g(5m+M)$.