

Решения задач и ответы

Каждая правильно решенная задача оценивается в 10 баллов.

9 класс

1. Машина ехала из деревни А в город Б с непостоянной скоростью: половину всего времени — со скоростью v , ещё треть — со скоростью $2v$, и остаток времени — со скоростью $3v$. Чему равна средняя скорость машины?

Решение.

Пусть полное время в пути равно t . Тогда полный пройденный путь равен:

$$s = \frac{t}{2}v + \frac{t}{3}(2v) + \left(t - \frac{t}{2} - \frac{t}{3}\right)(3v) = \frac{5}{3}vt. \quad (5 \text{ б.})$$

По определению средняя скорость $\bar{v} = s / t$. (3 б.)

Подставив сюда полученное выражение для s , найдём

$$\text{ответ: } \bar{v} = \frac{5}{3}v. \quad (2 \text{ б.})$$

2. Из пунктов А и В, расположенных вдоль реки на некотором расстоянии, одновременно начали двигаться навстречу друг к другу катер и моторная лодка. Известно, что катер проходит путь из А в В за время t_1 , а лодка проходит путь из В в А за время t_2 . Через какое время после начала движения они встретятся? Катер и лодка движутся равномерно.

Решение.

Пусть s — расстояние между пунктами А и В, а v_1 и v_2 — скорости катера и моторной лодки относительно берега.

По условию,

$$v_1 = \frac{s}{t_1}, \quad v_2 = \frac{s}{t_2}. \quad (1)$$

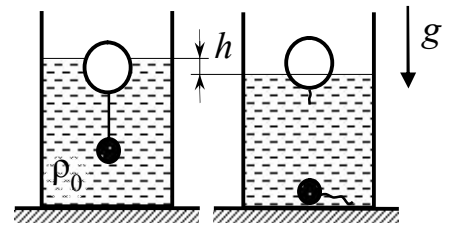
Время до встречи t определяется относительной скоростью $(v_1 + v_2)$:

$$t = \frac{s}{v_1 + v_2}. \quad (8 \text{ б.})$$

Подставив сюда выражение (1), получим

$$\text{ответ: } t = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}. \quad (2 \text{ б.})$$

3. В жидкости плотностью ρ_0 , налитой в цилиндрический стакан сечением S , плавает поплавок с привязанным к нему невесомой нитью грузиком массы m . Нить перерезают, и грузик падает на дно. При этом уровень жидкости в стакане уменьшается на h . Найти плотность материала грузика.



Решение.

Пусть V_1 и V_2 — объёмы вытесненной воды в первом и во втором случаях, $m_{\text{п}}$ — масса поплавка.

В первом случае система поплавок + грузик плавает, поэтому согласно закону Архимеда,

$$V_1 = \frac{m_{\text{п}} + m}{\rho_0}. \quad (1) \quad (3 \text{ б.})$$

Во втором случае объём V_2 складывается из объёма грузика m/ρ , где ρ — его плотность, и объёма, вытесненного поплавком, который, согласно закону Архимеда, равен $m_{\text{п}}/\rho_0$:

$$V_2 = \frac{m}{\rho} + \frac{m_{\text{п}}}{\rho_0}. \quad (2) \quad (3 \text{ б.})$$

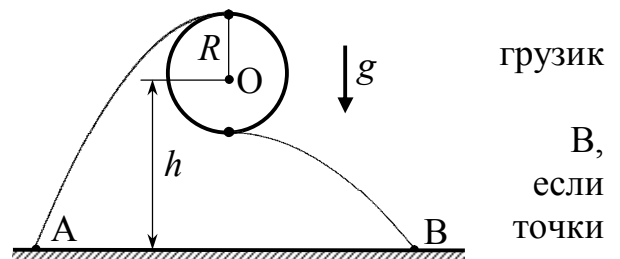
По условию задачи,

$$V_1 - V_2 = hS. \quad (3) \quad (2 \text{ б.})$$

Вычтя (2) из (1), получим $V_1 - V_2 = \frac{m}{\rho_0} - \frac{m}{\rho}$, и подставив сюда (3), найдём

$$\text{ответ: } \rho = \frac{\rho_0}{1 - \frac{hS\rho_0}{m}}. \quad (2 \text{ б.})$$

4. Грузик, привязанный к невесомой нерастяжимой нити, вращается в вертикальной плоскости вокруг точки O по окружности радиуса R . Если нить перерезать в момент, когда находится в верхней или нижней точке окружности, он упадёт на землю в точке A или соответственно (см. рис.). Найти расстояние AB , известно, что точки A и B равноудалены от O , которая находится на высоте h над поверхностью земли.



Решение.

Пусть расстояние $|AB|$ равно L . Обозначим скорость грузика в верхней точке v_1 , а время его падения из этой точки на землю t_1 . При падении грузика его движение

по горизонтали — равномерное со скоростью v_1 , а по вертикали — равноускоренное с ускорением g и нулевой начальной скоростью.

Поэтому

$$v_1 t_1 = \frac{L}{2}, \quad (1 \text{ б.})$$

$$\frac{gt^2}{2} = h + R. \quad (2 \text{ б.})$$

Отсюда получим:

$$v_1^2 = \frac{L^2}{4} \frac{g}{2(h+R)}. \quad (1)$$

Для падения грузика из нижней точки аналогично получим

$$v_2^2 = \frac{L^2}{4} \frac{g}{2(h-R)}, \quad (2) \quad (3 \text{ б.})$$

где скорость v_2 грузика в нижней точке связана со скоростью v_1 законом сохранения энергии:

$$mg(2R) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad (2 \text{ б.})$$

где m — масса грузика. Подставляя сюда (1) и (2), получим

$$2R = \frac{L^2}{16} \cdot \left(\frac{1}{h-R} - \frac{1}{h+R} \right) = \frac{L^2}{16} \cdot \frac{2R}{h^2 - R^2}.$$

Выразив отсюда L , получим

$$\text{ответ: } L = 4\sqrt{h^2 - R^2}. \quad (2 \text{ б.})$$

5. Верёвка длины l и массы m , однородная по длине, лежит на горизонтальном столе. Правый конец её пропущен через отверстие в столе и прикреплён снизу к крышке стола. На верёвку под столом подвесили маленький лёгкий блок с прикреплённым к нему грузом массы M (см. рис.). Верёвку вытянули влево до упора и отпустили, после чего она стала соскальзывать в отверстие. Найти скорость левого конца верёвки в момент, когда он переместился на расстояние x . Трения нет. Толщиной крышки стола пренебречь. Ускорение свободного падения g .

Решение.

Пусть h — расстояние от блока до крышки стола. Пренебрегая размерами блока и толщиной крышки стола, получим $h=x/2$.

Скорость грузика $u = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t}$, т.е.

$$u = \frac{v}{2}. \quad (2 \text{ б.})$$

Запишем закон сохранения энергии. В конечном состоянии суммарная кинетическая

энергия верёвки и груза K равна изменению их суммарной потенциальной энергии

$$K = \Delta U. \quad (1)$$

Кинетическая энергия грузика равна $\frac{Mu^2}{2}$. Часть верёвки, от левого её края до блока,

имеет массу $m \frac{(l-h)}{l}$ и движется со скоростью v , поэтому её кинетическая энергия

имеет массу $m \frac{(l-h)}{l} \frac{v^2}{2}$. Оставшаяся часть верёвки неподвижна, и её кинетическая

энергия равна нулю. Таким образом, суммарная кинетическая энергия K равна

$$K = \frac{Mu^2}{2} + m \frac{(l-h)}{l} \frac{v^2}{2}. \quad (2)$$

Груз опустился на высоту h , поэтому изменение его потенциальной энергии равна

Mgh . Часть верёвки длиной x , имеющая массу $m \frac{x}{l}$, переместилась под стол. При этом

центр масс этой части верёвки опустился на высоту $h/2$. Поэтому её потенциальная

энергия изменилась на величину $m \frac{x}{l} g \frac{h}{2}$. Потенциальная энергия оставшейся части

верёвки не изменилась. Таким образом, суммарное изменение потенциальной энергии всей системы равно

$$\Delta U = Mgh + m \frac{x}{l} g \frac{h}{2}. \quad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), получим

$$M \frac{u^2}{2} + m \frac{(l-h)}{l} \frac{v^2}{2} = Mgh + m \frac{x}{l} g \frac{h}{2}. \quad (6 \text{ б.})$$

Подставив сюда $u = \frac{v}{2}$ и $h = \frac{x}{2}$, получим

$$\frac{v^2}{2} \left[\frac{M}{4} + m \left(1 - \frac{x}{2l} \right) \right] = gx \left[\frac{M}{2} + m \frac{x}{4l} \right].$$

Откуда получим

$$\text{ответ: } v = \sqrt{gx \frac{M + m \frac{x}{2l}}{\frac{M}{4} + m \left(1 - \frac{x}{2l} \right)}}. \quad (2 \text{ б.})$$

Примечание. При записи закона сохранения энергии школьником возможны ошибки в величинах, входящих в него масс и расстояний. За каждую такую ошибку из 6 баллов вычитается по одному баллу.