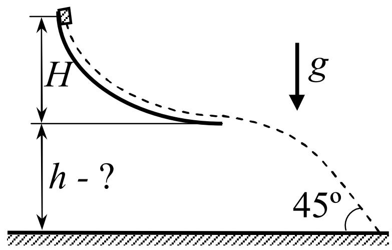
10 класс

1. Маленький брусок отпускают из верхней точки гладкого желоба высотой H, имеющего горизонтальный выход. Под действием силы тяжести брусок без трения скатывается с желоба, вылетает горизонтально из его нижней точки и падает на землю под углом 45°. Найти высоту h нижней точки желоба над поверхностью земли.



Решение.

По условию, угол падения равен 45°, т.е. горизонтальная и вертикальная скорости бруска в момент падения равны:

$$v_x = v_y, \quad (1)$$

При свободном падении горизонтальная скорость не изменилась, а в момент вылета из жёлоба её можно найти из закона сохранения энергии:

$$mgH = \frac{mv_x^2}{2}, \quad (2) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

где m — масса бруска.

Закон сохранения энергии при переходе от момента вылета бруска из жёлоба к моменту падения записывается в виде:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_x^2}{2}.$$

С учётом теоремы Пифагора

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2,$$

это выражение можно переписать в виде:

$$mgh = \frac{mv_y^2}{2}, \quad (3) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Из (1) следует, что правые части равенств (2) и (3) равны, а значит, равны и левые:

$$mgh = mgH.$$

Отсюда находим

ответ: $h = H$. **(4 б.)**

2. Два населенных пункта А и В расположены вдоль реки на некотором расстоянии. Между пунктами А и В курсируют катер и моторная лодка. Время движения катера из А в В равно t_1, а моторной лодки из В в А равно t_2. Через какое время после одновременного начала движения они встретились, если лодка вышла в рейс из пункта А, а катер из пункта В. Величины скоростей катера и моторной лодки относительно воды постоянные.

Решение.

Пусть s — расстояние между населёнными пунктами А и В, v_1 и v_2 — скорости катера и моторной лодки относительно воды, а u — скорость течения реки.

По условию,

$$v_1 + u = \frac{s}{t_1},\ v_2 - u = \frac{s}{t_2}, \qquad (1) \qquad \textbf{(3 б.)}$$

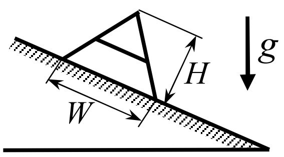
При движении навстречу друг другу время до встречи определяется относительной скоростью ($v_1 + v_2$):

$$t = \frac{s}{v_1 + v_2}, \qquad (2) \qquad \textbf{(5 б.)}$$

Относительную скорость можно найти, сложив равенства (1), а подставив найденное выражение в (2), получим

ответ: $t = \dfrac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}$. **(2б.)**

3. На наклонной плоскости стоит А-образная стремянка высотой H и шириной W, состоящая из двух одинаковых боковин и перекладины, соединяющей середины боковин. Угол наклона плоскости медленно увеличивают до тех пор, пока стремянка не начнет либо соскальзывать, либо опрокидываться. При каком максимальном коэффициенте трения она соскользнет, а не опрокинется?

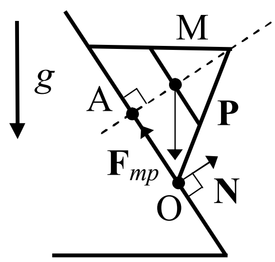


Решение.

Центр масс стремянки находится на середине перекладины. **(2б.)**

Стремянка может перевернуться только в том случае, когда угол наклона плоскости превысит пороговое значение, при котором центр масс М и точка опоры О лежат на одной вертикали (см. рисунок). **(2б.)**

К этому легко прийти, рассмотрев моменты сил относительно точки О.



В этом положении на стремянку действуют сила тяжести $\mathbf{P}$, сила реакции опоры $\mathbf{N}$ и сила трения $\mathbf{F}_{тр}$. Условие равновесия сил $\mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{тр} = 0$ означает, что эти три вектора образуют треугольник, который подобен треугольнику МОА, поскольку эти три вектора параллельны соответствующим сторонам этого треугольника.

Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{F_{тр}}{N} = \frac{OA}{AM} = \frac{W/2}{H/2} = \frac{W}{H}. \qquad \textbf{(3б.)}$$

Для того чтобы тело соскользнуло, а не опрокинулось, необходимо, чтобы сила трения принимала максимальное значение

$$F_{тр} = \mu N. \qquad \textbf{(1б.)}$$

Подставив это в предыдущее выражение, находим

ответ: $\mu = \dfrac{W}{H}$. **(2б.)**

4. На прямой OX находятся два радиомаяка, которые испускают сигналы, содержащие

координату маяка и точное время. Неподвижный приёмник, находящийся на этой прямой между маяками, принял два сигнала: один — от маяка с координатой x_1, испущенный в момент времени t_1, и второй — от маяка с координатой x_2, испущенный в момент времени t_2. Времена t_1 и t_2 измеряются маяками по точным атомным часам, синхронизованным друг с другом. По часам приёмника, второй сигнал поступил в приёмник на время Δt позже первого. Определить координату x приёмника. Сигналы распространяются со скоростью света c. (По такому принципу работают навигационные системы ГЛОНАСС и GPS.)

Решение.

Обозначим моменты времени прихода первого и второго сигналов в приёмник t_1' и t_2'.

Первый сигнал прошёл путь от радиомаяка до приёмника $(x - x_1)$ за время $(t_1' - t_1)$, распространяясь со скоростью света c, т.е.

$$x - x_1 = c(t_1' - t_1). \qquad (1) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

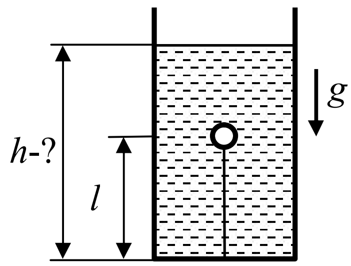
Аналогично, запишем уравнение для распространения второго сигнала от радиомаяка до приёмника

$$x_2 - x = c(t_2' - t_2). \qquad (2) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Вычтя (2) из (1) и учитывая, что, по условию, $t_2' - t_1' = \Delta t$, получим

ответ: $$x = \frac{x_1 + x_2 + c(t_2 - t_1 - \Delta t)}{2}. \qquad \textbf{(2б.)}$$

5. В сосуде с водой плавает маленький надутый шарик, привязанный ко дну невесомой нитью длины l. Плотность оболочки шарика больше плотности воды. Сосуд поднимают вверх с плавно возрастающим ускорением. В момент, когда ускорение стало равно a_1, шарик начал опускаться. После того, как он опустился на дно, ускорение сосуда стали плавно уменьшать. В момент, когда оно достигло величины a_2, шарик начал всплывать. Найти уровень h жидкости в сосуде. Температура поддерживается постоянной. Ускорение свободного падения равно g.



Решение.

Условие равновесия шарика в жидкости плотности ρ можно записать из следующих соображений. Выделим в жидкости объём V, имеющий, очевидно, массу ρV. Этот объём находится в равновесии. Поэтому, если заменить его телом того же объёма и той же массы $m = \rho V$, то это тело будет тоже находится в равновесии. Следовательно, условие равновесия тела массы m и объёма V, полностью погруженного в жидкость, можно записать в виде

$$\frac{m}{V} = \rho. \qquad (1)$$

Масса шарика постоянна, а его объём при постоянной температуре определяется только давлением жидкости на соответствующей глубине. Давление жидкости на глубине x равно, как известно, $P_0 + \rho g x$, где P_0 – атмосферное давление.

Если же двигать стакан вверх с ускорением a, то давление на глубине x станет равным

$$P = P_0 + \rho(g+a)x\,. \qquad (2)$$

Увеличение давления приводит, очевидно, к уменьшению объёма шарика, так что в какой-то момент отношение m/V превысит ρ, и шарик начнёт тонуть. Аналогично, после погружения на дно шарик начнёт всплывать, когда при уменьшении ускорения (а следовательно, и давления на дне) объём шарика увеличится так, что отношение m/V станет меньше ρ.

Из этих рассуждений ясно, что в момент, когда шарик начал опускаться, а также в момент, когда начал всплывать, соблюдалось условие равновесия (1). При неизменных массе шарика и плотности воды, это означает, что объём шарика в эти моменты времени одинаков. **(4 б.)**

Отсюда следует, что и давления жидкости на глубине, где находится шарик, в эти моменты равны. Таким образом, с учётом (2) имеем:

$$P_0 + \rho(g+a_1)(h-l) = P_0 + \rho(g+a_2)h\,. \qquad \textbf{(4б.)}$$

Отсюда получаем

$$\textbf{ответ: } h = \frac{g+a_1}{a_1-a_2}l\,. \qquad \textbf{(2б.)}$$