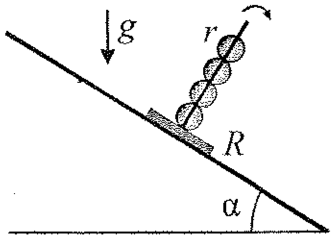
Открытая межвузовская олимпиада школьников СФО «Будущее Сибири» - 2010
2 этап (заключительный)
Физика 10 класс

Ключи к заданиям олимпиады (решения заданий)

Максимальная оценка каждого задания – 10 баллов

1. На наклонном столе с углом α при вершине стоит невесомая подставка, представляющая собой тонкий диск радиуса R с закреплённой в его центре длинной спицей. На спицу нанизывают массивные шарики радиуса r. Сколько необходимо шариков, чтобы подставка опрокинулась?



Решение. Центр тяжести N шариков находится на расстоянии Nr от диска. **(2 б.)**

Чтобы подставка опрокинулась, необходимо, чтобы вертикаль, проходящая через центр тяжести шариков, не пересекала опору. **(3 б.)**

Так как проекция отрезка спицы длиной Nr на плоскость опоры равна $Nr\,\mathrm{tg}\alpha$, то условие опрокидывания подставки

$$N r\,\mathrm{tg}\alpha \geq R \quad \Rightarrow \quad N \geq R\,\mathrm{ctg}\alpha/r.$$ **(3 б.)**

Ответ: $N = [R\,\mathrm{ctg}\alpha/r]$. **(2 б.)**

2. На сколько дней изменилось бы число дней в году, если бы Земля вращалась вокруг Солнца с той же скоростью по той же траектории, но в противоположном направлении, а вращение Земли вокруг своей оси осталось бы прежним? Число дней в году понимается в задаче как число солнечных восходов, наблюдаемых на экваторе за один оборот Земли вокруг Солнца.

Решение. Перейдём в систему отсчёта, движущуюся *поступательно* вместе с центром Земли (не вращающуюся вокруг оси вращения Земли). В этой системе отсчёта Солнце вращается с угловой скоростью

$$\Omega = 1 \text{ оборот/год}$$ **(4 б.)**

(такой выбор единиц измерения угловой скорости удобен в данной задаче, так как при этом величина угловой скорости совпадает с числом дней в году). Земля в этой системе отсчёта вращается с некоторой угловой скоростью ω ($\omega > \Omega$, знаки угловых скоростей совпадают). Число дней в году определяется относительной угловой скоростью вращения:

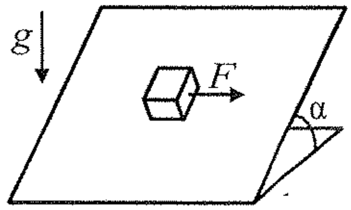
$$N = \omega - \Omega, \quad \text{а} \quad N' = \omega + \Omega,$$ **(4 б.)**

где N' соответствует смене направления орбитального вращения Земли. Отсюда находим: $\Delta N = N' - N = 2\Omega = 2$ дня.

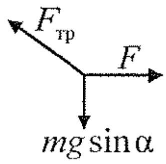
Ответ: число дней в году увеличилось бы на 2 дня. **(2 б.)**

Примечание: За ответы «изменилось бы на 2 дня» или даже «уменьшилось бы на 2 дня» **баллы не отнимать** (предполагается, что для школьника допустимо не знать соотношение направлений орбитального и суточного вращений Земли).

3. К телу массы m, покоящемуся на наклонной плоскости, прикладывают силу F в горизонтальном направлении параллельно наклонной плоскости. Найти величину ускорения тела. Коэффициент трения μ, угол наклона плоскости α. Ускорение свободного падения равно g.



Решение. Тело движется под некоторым углом к склону, в направлении результирующей силы F и составляющей силы тяжести вдоль наклонной плоскости $mg\sin\alpha$. Направление силы трения противоположно направлению движения тела, а значит, и направлению ускорения. Уравнение движения тела имеет вид:



$$\sqrt{F^2+(mg\sin\alpha)^2}-F_{тр}=ma. \qquad (1) \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Сила трения $F_{тр}$, действующая на движущееся тело, равна $F_{тр}=\mu N$, где N — сила реакции опоры. Тело движется вдоль наклонной плоскости, поэтому сумма сил, действующих на тело, в проекции на нормаль к наклонной плоскости равна нулю:

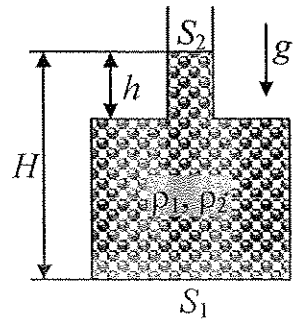
$$N-mg\cos\alpha=0 \;\Rightarrow\; F_{тр}=\mu mg\cos\alpha \quad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Из (1) и (2) находим: $$a=\sqrt{\left(\frac{F}{m}\right)^2+(g\sin\alpha)^2}-\mu g\cos\alpha. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Если $\sqrt{F^2+(mg\sin\alpha)^2}\le\mu mg\cos\alpha$ или $F\le mg\sqrt{\mu^2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$, то $a=0$. **(2 б.)**

Ответ: $a=\begin{cases}\sqrt{(F/m)^2+(g\sin\alpha)^2}-\mu g\cos\alpha, & \text{при } F>mg\sqrt{\mu^2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\\ 0, & \text{при } F\le mg\sqrt{\mu^2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\end{cases}.$

4. В цилиндрический сосуд поперечного сечения S_1 с цилиндрическим горлышком поперечного сечения S_2 налили одинаковые объёмы двух несмешивающихся жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1>\rho_2$). Сосуд хорошо взболтали, так что образовалась эмульсия — взвесь капелек одной жидкости в другой, — и поставили на стол. Уровень жидкости находится на высоте H от дна сосуда; горлышко заполнено до высоты h. Насколько изменится давление на дно сосуда после того как эмульсия опять расслоится на две компоненты? Ускорение свободного падения равно g.



Решение. Пусть ρ — плотность эмульсии, V — её объём. Поскольку объёмы жидкостей одинаковы, справедливо соотношение:

$$\rho V = \rho_1 \frac{V}{2} + \rho_2 \frac{V}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Поэтому давление на дно сосуда равно: $P = \rho g H = \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2} gH.$ (1) **(1 б.)**

Т. к. $\rho_1 > \rho_2$, то после расслоения жидкость с плотностью ρ_1 займёт нижнее положение. Обозначим h_1 высоту слоя жидкости плотности ρ_1. Поскольку объёмы жидкостей одинаковы ($h_1 < H - h$):

$$h_1 S_1 = (H - h - h_1)S_1 + hS_2. \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Давление на дно есть сумма давлений двух жидкостей:

$$P' = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g(H - h_1). \qquad (3) \qquad \textbf{(3 б.)}$$

Вычтя из уравнения (3) уравнение (1), найдём:

$$\Delta P = P' - P = -(\rho_1 - \rho_2) g \left(\frac{H}{2} - h_1 \right). \qquad (4)$$

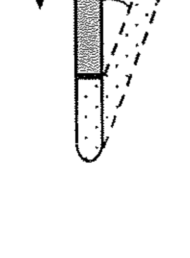
Из (2) найдём $\dfrac{H}{2} - h_1 = \dfrac{h}{2}\left(1 - \dfrac{S_2}{S_1}\right)$ и подставим в (4):

$$\Delta P = -\left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right) \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} gh.$$

Как видно, если $S_1 = S_2$ или $\rho_1 = \rho_2$, то $\Delta P = 0$, что и следовало ожидать.

Ответ: давление уменьшится на величину $\left(1 - \dfrac{S_2}{S_1}\right) \dfrac{\rho_1 - \rho_2}{2} gh$. **(2 б.)**

5. Пробирка, расположенная вертикально в поле тяжести, заполнена на 1/3 газом и на 2/3 жидкостью. Жидкость находится сверху и отделена от газа тонким невесомым поршнем. Трение поршня о пробирку отсутствует. Внешнее давление равно нулю. На какой минимальный угол α нужно отклонить пробирку от вертикали, чтобы поршень вылетел из пробирки? Температуру считать постоянной.



Решение. Найдём положение равновесия поршня, когда пробирка отклонена на угол α от вертикали. Согласно закону Бойля-Мариотта ($PV = \mathrm{const}$),

$$Px = P_0\frac{L}{3}, \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где P — давление газа в пробирке, P_0 — первоначальное давление газа, x — расстояние поршня от дна пробирки, L — высота пробирки. Так как внешнее давление равно нулю, то давление газа уравновешивается давлением столбика жидкости над ним:

$$P = \rho g(L-x)\cos\alpha, \qquad (2) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

$$P_0 = \rho g\frac{2L}{3}. \qquad (3) \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим уравнение для x:

$$x^2 - Lx + \frac{2L^2}{9\cos\alpha} = 0. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Дискриминант этого уравнения $D = L^2\left(1-\frac{8}{9\cos\alpha}\right)$ обращается в ноль при $\alpha = \arccos(8/9)$. При $\alpha \le \arccos(8/9)$ дискриминант лежит в пределах $0 \le D \le L^2/9$, откуда следует, что корни уравнения лежат в пределах $L/3 \le D \le 2L/3$. Если же $\alpha > \arccos(8/9)$, то $D<0$ и равновесного положения поршня в пробирке не существует, т. е. поршень не может находиться в пробирке. Поэтому при «критическом» угле $\alpha = \arccos(8/9)$ поршень вылетит из пробирки.

Ответ: $\alpha = \arccos\left(\frac{8}{9}\right)$. **(4 б.)**