9 класс

1. (30 баллов) Тело, брошенное вертикально вверх с некоторой высоты, находилось в полете 3 с и прошло путь, втрое больший начальной высоты. С какой высоты было брошено тело? Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Ответ: Начальная высота равна $9\left(3-2\sqrt{2}\right)g/2$, где g – ускорение свободного падения, т.е. примерно 7,7 м.

Решение: Пройденный путь втрое больше начальной высоты только в том случае, если максимальная высота подъема тела в два раза больше начальной. Обозначим время подъема тела до верхней точки через t_1, а время падения от верхней точки до земли через t_2. Очевидно, что t_1 равно также времени падения тела с максимальной высоты до начальной (половины максимальной), поэтому можно записать уравнение

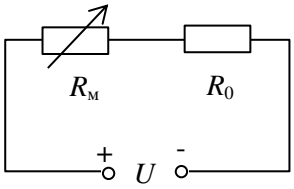
$$\frac{gt_1^2}{2}=\frac{1}{2}\frac{gt_2^2}{2},$$

откуда следует $t_2=\sqrt{2}t_1$. Учитывая также, что $t_1+t_2=3$ с, находим $t_1=3\left(\sqrt{2}-1\right)$ с. Для максимальной высоты получаем

$$\frac{gt_1^2}{2}=9\left(3-2\sqrt{2}\right)g\approx 7{,}7\text{ м}.$$

Разбалловка: Понято, что максимальная высота вдвое больше начальной – 10 баллов.
Это условие записано через времена $t_{1,2}$ – 10 баллов.
Найдено t_1 – 5 баллов.
Получен правильный ответ – 5 баллов.

2. (40 баллов) Цепь, составленная из резистора с сопротивлением R_0 = 55 Ом и магазина сопротивлений, который может принимать дискретные (с шагом 3 Ом) значения $R_м$ = 3, 6, 9 … 99 Ом, подключена к источнику с напряжением U = 100 В (см. рис.). Какую максимальную мощность можно получить на магазине сопротивлений?



Ответ: Максимальная мощность на магазине равна 45,45 Вт.

Решение: Выделяющаяся на магазине сопротивлений мощность определяется формулой

$$P = \frac{U^2 R_м}{(R_м + R_0)^2},$$

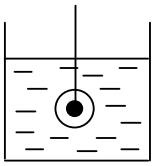
которую для анализа полезно преобразовать к виду

$$P = \frac{U^2}{R_0\left(\sqrt{\frac{R_м}{R_0}} + \sqrt{\frac{R_0}{R_м}}\right)^2}.$$

Сумма взаимно обратных величин в знаменателе имеет минимум при $R_м = R_0$. При этом выделяющаяся мощность имеет максимум. Поскольку условие $R_м$ = 55 Ом не может быть выполнено точно, нужно взять близкие к 55 омам значения $R_м$, т.е. проверить на максимум мощности значения 54 Ом и 57 Ом. При $R_м$ = 54 Ом мощность равна 45,45 Вт, а при $R_м$ = 57 Ом равна 45,44 Вт. Таким образом, максимально достижимой является мощность 45,45 Вт.

Разбалловка: Написана выражение для выделяемой на магазине мощности – 10 баллов.
Понято, что максимум выражения достигается при $R_м = R_0$ – 15 баллов.
Понято, что максимальная мощность достигается при $R_м$ = 54 Ом – 10 баллов.
Найдена максимально достижимая мощность – 5 баллов.

3. (30 баллов) Кусок металла с намороженным на него льдом висит на нити, находясь полностью под водой и не касаясь дна сосуда с водой (см. рис.). Сила натяжения нити равна 3 Н. Когда лед растаял, сила натяжения возросла до 3,5 Н. Найти массу льда и массу металла. Плотность металла равна 4500 кг/м^3, льда 900 кг/м^3 и воды 1000 кг/м^3. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.



Ответ: Масса льда равна 0,45 кг. Масса металла равна 0,45 кг.

Решение: Запишем условие равновесия для куска металла со льдом

$$T_1 + \rho_в(V_л + V_м)g = \rho_л V_л g + \rho_м V_м g$$

и для куска металла после таяния льда

$$T_2 + \rho_в V_м g = \rho_м V_м g.$$

Здесь $T_{1,2}$ – значения силы натяжения нити, g – ускорение свободного падения, а $\rho_в$, $\rho_л$ и $\rho_м$ – плотности воды, льда и металла соответственно. Вычитая первое уравнение из второго, получаем

$$T_2 - T_1 = (\rho_в - \rho_л)V_л g.$$

Учитывая, что $T_2 - T_1$ = 0,5 Н, находим отсюда объем льда $V_л$ = 0,5 л, а умножая его на плотность льда, находим и массу льда $\rho_л V_л$ = 0,45 кг. Из второго условия равновесия находим объем металла $V_м$ = 0,1 л, а умножая на плотность металла, находим массу металла $\rho_м V_м$ = 0,45 кг.

Разбалловка: Записано условие равновесия для металла со льдом – 10 баллов.
Записано условие равновесия для металла – 5 баллов.
Найдена масса льда – 10 баллов.
Найдена масса металла – 5 баллов.