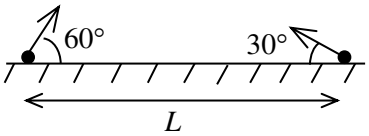
9 класс

1. (25 баллов) Два тела бросили одновременно из точек на поверхности земли, удаленных друг от друга на расстояние L. Векторы начальных скоростей тел лежат в одной вертикальной плоскости и составляют с горизонтом углы 30° и 60° (см. рис.). Какого минимального значения достигает расстояние между находящимися в полете телами, если дальности полета тел равны L?



Ответ: Минимальное расстояние равно $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}L \approx 0{,}26L$.

Решение: Прежде всего, используя формулу для дальности полета тела, брошенного с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту, $L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ (g – ускорение свободного падения) и учитывая, что $\sin(2 \cdot 30°) = \sin(2 \cdot 60°)$, делаем вывод о равенстве начальных скоростей тел. Записывая далее зависимости координат тел от времени в виде

$$x_1(t) = V_0 \cos 60° t, \quad y_1(t) = V_0 \sin 60° t - gt^2/2,$$
$$x_2(t) = L - V_0 \cos 30° t, \quad y_2(t) = V_0 \sin 30° t - gt^2/2,$$

вычисляем расстояние между телами по формуле

$$R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}V_0 t - \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}L\right)^2 + \frac{2-\sqrt{3}}{4}L^2}.$$

Видно, что расстояние R достигает минимума $R_{\min} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}L \approx 0{,}26L$ в момент времени $t_{\min} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\frac{L}{V_0} \approx 0{,}68\frac{L}{V_0}$. Теперь необходимо проверить, что время $t_{\min}$ не превосходит времен полета тел. Наименьшее время полета имеет тело, брошенное под углом 30°. Записывая это время как $t_{30°} = \frac{L}{V_0 \cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{L}{V_0} \approx 1{,}15\frac{L}{V_0}$, видим, что $t_{\min} < t_{30°}$. Следовательно, найденное значение $R_{\min}$ и является ответом.

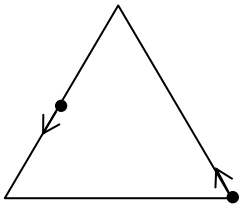
Другой способ решения задачи основан на рассмотрении движения одного тела относительно другого. Поскольку ускорения тел одинаковы (равны ускорению свободного падения), то их относительная скорость не меняется со временем ни по направлению, ни по величине и остается равной ее начальному значению:

$$V_{\text{отн}} = 2V_0 \sin 45° = \sqrt{2}V_0.$$

При этом одно тело движется относительно другого по прямой, составляющей угол 15° с горизонтом. Чтобы найти наименьшее расстояние между телами, нужно опустить перпендикуляр на эту прямую из точки нахождения другого (неподвижного) тела. Наименьшее расстояние между телами – это катет прямоугольного треугольника с гипотенузой L, равный $R_{\min} = L \sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}L \approx 0{,}26L$. Время достижения минимального расстояния находится как $t_{\min} = \frac{L\cos 15°}{V_{\text{отн}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}\frac{L}{V_0} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\frac{L}{V_0} \approx 0{,}68\frac{L}{V_0}$. Так же, как и в первом способе решения, это время необходимо сравнить с $t_{30°}$.

Разбалловка: Показано равенство начальных скоростей тел – 5 баллов.
Записаны зависимости координат тел от времени или найдена $V_{\text{отн}}$ – 5 баллов.
Записана зависимость расстояния между телами от времени – 5 баллов.
Найдено минимальное расстояние – 5 баллов.
Проведено сравнение времен $t_{\min}$ и $t_{30°}$ – 5 баллов.

2. (25 баллов) Два жучка одновременно начинают движение с равными скоростями по сторонам правильного треугольника: один из вершины, другой с середины стороны (см. рис.). Каким будет минимальное расстояние между жучками, если сторона треугольника равна a?

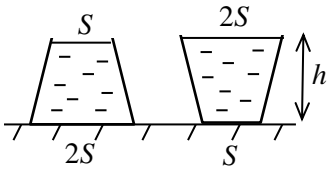


Ответ: Минимальное расстояние равно $3a/4$.

Решение: Расстояние между жучками станет минимальным в тот момент, когда каждый из них пройдет расстояние $a/4$ и соединяющий жучков отрезок прямой станет параллельным основанию треугольника. Действительно, в этот момент скорости жучков будут направлены под одним и тем же углом к данной прямой, и скорость сближения жучков обратится в нуль. Соединяющий жучков отрезок при этом будет стороной правильного треугольника, его длина будет равна $3a/4$.

Разбалловка: Проведен анализ сближения и удаления жучков друг от друга – 5 баллов.
Найдено положение жучков при минимальном расстоянии между ними – 10 баллов.
Найдено минимальное расстояние – 10 баллов.

3. (25 баллов) В откачанном от воздуха помещении стоят две заполненные жидкостью колбы в виде усеченных конусов (см. рис.). На сколько отличаются силы, действующие на жидкость со стороны боковых стенок в этих сосудах? Плотность жидкости равна ρ, ускорение свободного падения g. *Указание*. Объем колбы $V = hS\left(1 + \sqrt{2}/3\right) \approx 1{,}47hS$.



Ответ: Силы отличаются на $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - 1\right)\rho g hS \approx 0.06\rho g hS$.

Решение: Запишем условие баланса сил, действующих на жидкость в сужающемся кверху сосуде, в виде

$$F_{д1} = mg + F_{ст1},$$

где $F_{д1}$ – сила, с которой дно действует на жидкость, mg – действующая на жидкость сила тяжести и $F_{ст1}$ – сила со стороны стенок. Аналогично для расширяющегося кверху сосуда запишем

$$F_{д2} + F_{ст2} = mg.$$

Складывая уравнения и учитывая, что $F_{д1} = \rho g h 2S$, $F_{д2} = \rho g hS$ и $mg = \rho V g = \rho g hS\left(1 + \sqrt{2}/3\right)$, получаем

$$F_{ст1} - F_{ст2} = 3\rho g hS - 2\left(1 + \sqrt{2}/3\right)\rho g hS = \left(1 - 2\sqrt{2}/3\right)\rho g hS \approx 0{,}057\rho g hS.$$

Разбалловка: Записано условие баланса сил для каждого сосуда – по 5 баллов.
Записаны выражения для сил со стороны дна – по 5 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

4. (25 баллов) На дне цилиндрического сосуда лежит шар радиуса R. Когда в сосуд налили объем V воды, сила давления шара на дно уменьшилась до 4/9 от первоначального значения. После доливания такого же объема масла с плотностью 0,8 плотности воды сила давления шара на дно обратилась в нуль. Найти площадь дна сосуда. *Указание.* Объем шара $V_ш$ связан с его радиусом формулой $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Ответ: Площадь дна сосуда равна $\frac{V}{R} + \frac{2}{3}\pi R^2$.

Решение: Запишем условие баланса действующих на шар сил до наливания воды

$$mg = N_0$$

(m – масса шара, g – ускорение свободного падения, N_0 – первоначальное значение силы давления шара на дно), после наливания воды

$$mg = \frac{4}{9}N_0 + \rho_в V_в g$$

($\rho_в$ – плотность воды, $V_в$ – объем погруженной в воду части шара) и после доливания масла

$$mg = 0 + \rho_в V_в g + 0{,}8\rho_в V_м g$$

($V_м$ – объем погруженной в масло части шара). Из записанных соотношений следует, что $V_м = V_в$. При одинаковых объемах воды и масла данное равенство может быть выполнено только в том случае, когда слои воды и масла имеют одинаковую толщину R, т.е. вода доходит до середины шара, а поверхность масла находится на уровне вершины шара. Для объема части сосуда, где находится вода и нижняя половина шара, можно записать такое равенство

$$SR = V + \frac{1}{2}V_ш = V + \frac{2}{3}\pi R^3,$$

откуда для площади дна S получаем

$$S = \frac{V}{R} + \frac{2}{3}\pi R^2.$$

Разбалловка: Записаны условия баланса сил после доливания воды, масла – по 5 баллов.
Получено $V_м = V_в$ – 5 баллов.
Доказано, что слои воды и масла имеют толщину R – 5 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.