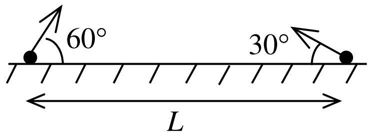
**ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2020-2021**
**Физика, финальный тур. 180 минут**

## ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

**Внимание: квант оценки равен 5 (можно ставить только 5, 10, 15 и т. д. баллов)!**

### 11 класс

**1**. (25 баллов) Два тела бросили одновременно из точек на поверхности земли, удаленных друг от друга на расстояние $L$. Векторы начальных скоростей тел лежат в одной вертикальной плоскости и составляют с горизонтом углы 30° и 60° (см. рис.). Какого минимального значения достигает расстояние между находящимися в полете телами, если дальности полета тел равны $L$?




**Ответ**: Минимальное расстояние равно $L\sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}L \approx 0{,}26L$.

**Решение**: Прежде всего, используя формулу для дальности полета тела, брошенного с начальной скоростью $V_0$ под углом α к горизонту, $L = \frac{V_0^2\sin 2\alpha}{g}$ ($g$ – ускорение свободного падения) и учитывая, что $\sin(2\cdot 30°) = \sin(2\cdot 60°)$, делаем вывод о равенстве начальных скоростей тел. Записывая далее зависимости координат тел от времени в виде

$$x_1(t) = V_0\cos 60° t,\quad y_1(t) = V_0\sin 60° t - gt^2/2,$$
$$x_2(t) = L - V_0\cos 30° t,\quad y_2(t) = V_0\sin 30°\, t - gt^2/2,$$

вычисляем расстояние между телами по формуле

$$R = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}V_0 t - \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}L\right)^2 + \frac{2-\sqrt{3}}{4}L^2}.$$

Видно, что расстояние $R$ достигает минимума $R_{\min} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}L \approx 0{,}26L$ в момент времени $t_{\min} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\frac{L}{V_0} \approx 0{,}68\frac{L}{V_0}$. Теперь необходимо проверить, что время $t_{\min}$ не превосходит времен полета тел. Наименьшее время полета имеет тело, брошенное под углом 30°. Записывая это время как $t_{30°} = \frac{L}{V_0\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{L}{V_0} \approx 1{,}15\frac{L}{V_0}$, видим, что $t_{\min} < t_{30°}$. Следовательно, найденное значение $R_{\min}$ и является ответом.

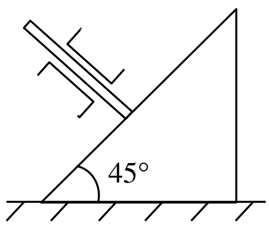
Другой способ решения задачи основан на рассмотрении движения одного тела относительно другого. Поскольку ускорения тел одинаковы (равны ускорению свободного падения), то их относительная скорость не меняется со временем ни по направлению, ни по величине и остается равной ее начальному значению:

$$V_{\text{отн}} = 2V_0\sin 45° = \sqrt{2}V_0.$$

При этом одно тело движется относительно другого по прямой, составляющей угол 15° с горизонтом. Чтобы найти наименьшее расстояние между телами, нужно опустить перпендикуляр на эту прямую из точки нахождения другого (неподвижного) тела. Наименьшее расстояние между телами – это катет прямоугольного треугольника с гипотенузой $L$, равный $R_{\min} = L\sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}L \approx 0{,}26L$. Время достижения минимального расстояния находится как $t_{\min} = \frac{L\cos 15°}{V_{\text{отн}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}\frac{L}{V_0} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\frac{L}{V_0} \approx 0{,}68\frac{L}{V_0}$. Так же, как и в первом способе решения, это время необходимо сравнить с $t_{30°}$.

**Разбалловка:** Показано равенство начальных скоростей тел – 5 баллов.
Записаны зависимости координат тел от времени или найдена $V_{\text{отн}}$ – 5 баллов.
Записана зависимость расстояния между телами от времени – 5 баллов.
Найдено минимальное расстояние – 5 баллов.
Проведено сравнение времен $t_{\min}$ и $t_{30°}$ – 5 баллов.

**2**. (25 баллов) На гладком горизонтальном столе находится клин с углом 45° при основании. На гладкую наклонную грань клина давит стержень, который из-за направляющих может двигаться только перпендикулярно наклонной грани клина (см. рис.). Трение между стержнем и направляющими отсутствует. Масса стержня равна массе клина. Найти ускорение клина. Ускорение свободного падения равно $g$.




**Ответ**: Ускорение клина равно $g/3$.

**Решение**: Обозначив через $N$ силу давления стержня на клин, запишем второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонтальную ось

$$ma_1 = N\frac{\sqrt{2}}{2},$$

где $a_1$ – ускорение клина, $m$ – его масса. Второй закон Ньютона для стержня в проекции на перпендикулярную наклонной грани клина ось запишем в виде

$$ma_2 = mg\frac{\sqrt{2}}{2} - N,$$

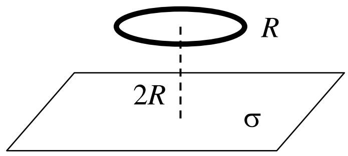
где $a_2$ – ускорение стержня. Из условия равенства проекций ускорений стержня и клина на ось, перпендикулярную наклонной грани клина (кинематическая связь), следует, что

$$a_2 = a_1\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из системы записанных уравнений находим, что $a_1 = g/3$.

**Разбалловка**: Записан второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонталь – 5 баллов.
Записан второй закон Ньютона для стержня в проекции на нормаль к грани клина – 5 баллов.
Записана связь ускорений – 10 баллов.
Получен правильный ответ – 5 баллов.

**3.** (25 баллов) Тонкое кольцо радиуса $R$ с равномерно распределенным по нему электрическим зарядом расположено параллельно плоскости, по которой равномерно распределен заряд с плотностью σ. Расстояние между кольцом и плоскостью равно $2R$. При каком заряде кольца разность потенциалов между центром кольца и точкой пересечения оси кольца с плоскостью равна нулю? Чему равна при этом напряженность электрического поля посередине между указанными точками? *Указание.* Заряженная плоскость создает однородное поле с напряженностью $\sigma/(2\varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0$ – электрическая постоянная.




**Ответ**: Заряд кольца равен $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}4\pi R^2\sigma$. Напряженность поля равна $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

**Решение**: По принципу суперпозиции для потенциала разность потенциалов между точками 1 (центр кольца) и 2 (точка пересечения) складывается из разностей потенциалов, создаваемых кольцом и плоскостью, т.е. может быть записана в виде

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{5}R} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}2R,$$

где через $q$ обозначен искомый заряд кольца. Накладывая условие $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, находим

$$q = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}4\pi R^2\sigma.$$

Электрическое поле в искомой точке находим как векторную сумму противоположно направленных полей кольца и плоскости. Вычитая из поля кольца

$$\frac{q}{8\pi\varepsilon_0\sqrt{2}R^2} = \frac{\sigma\sqrt{5}}{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)\varepsilon_0}$$

поле плоскости $\sigma/(2\varepsilon_0)$, находим, что результирующее поле равно

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

(из положительности данного выражения следует, что поле направлено в сторону плоскости).

**Разбалловка**: Использован принцип суперпозиции для потенциала – 5 баллов.
Записан вклад кольца в разность потенциалов – 5 баллов.
Записан вклад плоскости в разность потенциалов – 5 баллов.
Найден заряд кольца – 5 баллов.
Найдено поле в нужной точке – 5 баллов.

**4.** (25 баллов) Груз массы $m$, подвешенный к потолку на пружине жесткости $k$, совершает колебания с амплитудой $mg/(2k)$, где $g$ – ускорение свободного падения. В момент, когда растяжение пружины минимально, ее середину закрепляют. Найти амплитуду последующих колебаний груза.

**Ответ**: Амплитуда колебаний станет равной $mg/(4k)$.

**Решение**: До закрепления середины пружины груз колеблется около положения равновесия, в котором пружина растянута на $mg/k$. Растяжение пружины минимально при прохождении грузом верхнего положения и равно $mg/(2k)$. В момент закрепления середины пружины растяжение половины пружины равно $mg/(4k)$. В ходе последующих колебаний растяжение пружины в положении равновесия будет равно $mg/(2k)$, т.к. жесткость половины пружины равна $2k$. Амплитуду последующих колебаний находим как разность растяжений пружины в положении равновесия и в верхнем (начальном) положении $mg/(2k)$ - $mg/(4k)$ = $mg/(4k)$.

**Разбалловка**: Найдено растяжение пружины в момент закрепления – 5 баллов.
Найдено растяжение половины пружины в момент закрепления – 5 баллов.
Учтено, что половина пружины имеет удвоенную жесткость – 5 баллов.
Получен правильный ответ – 10 баллов.