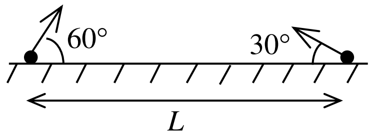
10 класс

1. (25 баллов) Два тела бросили одновременно из точек на поверхности земли, удаленных друг от друга на расстояние L. Векторы начальных скоростей тел лежат в одной вертикальной плоскости и составляют с горизонтом углы 30° и 60° (см. рис.). Какого минимального значения достигает расстояние между находящимися в полете телами, если дальности полета тел равны L?



Ответ: Минимальное расстояние равно $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}L \approx 0{,}26L$.

Решение: Прежде всего, используя формулу для дальности полета тела, брошенного с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту, $L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ (g – ускорение свободного падения) и учитывая, что $\sin(2 \cdot 30°) = \sin(2 \cdot 60°)$, делаем вывод о равенстве начальных скоростей тел. Записывая далее зависимости координат тел от времени в виде

$$x_1(t) = V_0 \cos 60° t,\quad y_1(t) = V_0 \sin 60° t - gt^2/2,$$
$$x_2(t) = L - V_0 \cos 30° t,\quad y_2(t) = V_0 \sin 30°\, t - gt^2/2,$$

вычисляем расстояние между телами по формуле

$$R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}V_0 t - \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}L\right)^2 + \frac{2-\sqrt{3}}{4}L^2}.$$

Видно, что расстояние R достигает минимума $R_{\min} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}L \approx 0{,}26L$ в момент времени $t_{\min} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\frac{L}{V_0} \approx 0{,}68\frac{L}{V_0}$. Теперь необходимо проверить, что время $t_{\min}$ не превосходит времен полета тел. Наименьшее время полета имеет тело, брошенное под углом 30°. Записывая это время как $t_{30°} = \frac{L}{V_0 \cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{L}{V_0} \approx 1{,}15\frac{L}{V_0}$, видим, что $t_{\min} < t_{30°}$. Следовательно, найденное значение $R_{\min}$ и является ответом.

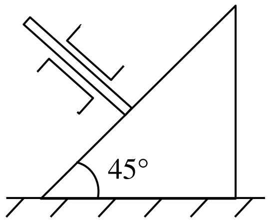
Другой способ решения задачи основан на рассмотрении движения одного тела относительно другого. Поскольку ускорения тел одинаковы (равны ускорению свободного падения), то их относительная скорость не меняется со временем ни по направлению, ни по величине и остается равной ее начальному значению:

$$V_{\text{отн}} = 2V_0 \sin 45° = \sqrt{2}V_0.$$

При этом одно тело движется относительно другого по прямой, составляющей угол 15° с горизонтом. Чтобы найти наименьшее расстояние между телами, нужно опустить перпендикуляр на эту прямую из точки нахождения другого (неподвижного) тела. Наименьшее расстояние между телами – это катет прямоугольного треугольника с гипотенузой L, равный $R_{\min} = L \sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}L \approx 0{,}26L$. Время достижения минимального расстояния находится как $t_{\min} = \frac{L \cos 15°}{V_{\text{отн}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}\frac{L}{V_0} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\frac{L}{V_0} \approx 0{,}68\frac{L}{V_0}$. Так же, как и в первом способе решения, это время необходимо сравнить с $t_{30°}$.

Разбалловка: Показано равенство начальных скоростей тел – 5 баллов.
Записаны зависимости координат тел от времени или найдена $V_{\text{отн}}$ – 5 баллов.
Записана зависимость расстояния между телами от времени – 5 баллов.
Найдено минимальное расстояние – 5 баллов.
Проведено сравнение времен $t_{\min}$ и $t_{30°}$ – 5 баллов.

2. (25 баллов) На гладком горизонтальном столе находится клин с углом 45° при основании. На гладкую наклонную грань клина давит стержень, который из-за направляющих может двигаться только перпендикулярно наклонной грани клина (см. рис.). Трение между стержнем и направляющими отсутствует. Масса стержня равна массе клина. Найти ускорение клина. Ускорение свободного падения равно g.



Ответ: Ускорение клина равно $g/3$.

Решение: Обозначив через N силу давления стержня на клин, запишем второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонтальную ось

$$ma_1 = N\frac{\sqrt{2}}{2},$$

где a_1 – ускорение клина, m – его масса. Второй закон Ньютона для стержня в проекции на перпендикулярную наклонной грани клина ось запишем в виде

$$ma_2 = mg\frac{\sqrt{2}}{2} - N,$$

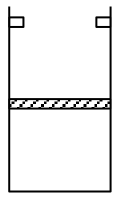
где a_2 – ускорение стержня. Из условия равенства проекций ускорений стержня и клина на ось, перпендикулярную наклонной грани клина (кинематическая связь), следует, что

$$a_2 = a_1\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из системы записанных уравнений находим, что $a_1 = g/3$.

Разбалловка: Записан второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонталь – 5 баллов.
Записан второй закон Ньютона для стержня в проекции на нормаль к грани клина – 5 баллов.
Записана связь ускорений – 10 баллов.
Получен правильный ответ – 5 баллов.

3. (25 баллов) Идеальный одноатомный газ находится в вертикальном сосуде и отделен от атмосферы тяжелым поршнем, который может скользить по стенкам сосуда без трения. Упоры на стенках допускают увеличение объема газа не более, чем вдвое (см. рис.). Начальное давление газа в два раза превышает атмосферное. Газу сообщают количество теплоты, в три раза большее его внутренней энергии U_0, и после этого располагают сосуд горизонтально. Какое количество теплоты нужно отвести от газа при новом положении сосуда, чтобы газ вернулся к первоначальному объему?



Ответ: Нужно отвести количество теплоты, равное $\frac{19}{6}U_0$.

Решение: Для решения удобно использовать формулу $pV = \frac{2}{3}U$, которая следует из уравнения Клапейрона-Менделеева $pV = \nu RT$ и выражения для внутренней энергии одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\nu RT$. В начальном состоянии $2p_{\text{a}}V_0 = \frac{2}{3}U_0$, где p_{a} – атмосферное давление. При сообщении газу теплоты вначале будет происходить его изобарное расширение. Проверим, достаточно ли количества теплоты $3U_0$ для увеличения объема газа вдвое, т.е. для расширения до упоров. Согласно первому принципу термодинамики ($Q = \Delta U + A$) для этого требуется количество теплоты $Q_1 = U_0 + 2p_{\text{a}}V_0 = U_0 + \frac{2}{3}U_0 = \frac{5}{3}U_0$, что меньше $3U_0$. Следовательно, газ расширится до упоров. При сообщении газу остального количества теплоты $3U_0 - \frac{5}{3}U_0 = \frac{4}{3}U_0$ произойдет изохорный нагрев газа, его давление при этом увеличится на $\frac{4}{3}p_{\text{a}}$ до значения $\frac{10}{3}p_{\text{a}}$. После приведения сосуда в горизонтальное положение поршень перестанет давить на газ своим весом. Вследствие этого при отборе тепла от газа его объем начнет уменьшаться только после того, как давление изохорно уменьшиться до p_{a}. Уменьшение объема будет происходить при постоянном давлении p_{a}. Чтобы найти, какое количество теплоты Q' нужно отвести от газа для возвращения его к объему V_0, запишем первый принцип термодинамики для процесса в целом:

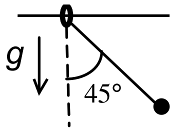
$$3U_0 - Q' = \left(\frac{1}{2}U_0 - U_0\right) + (2p_{\text{a}}V_0 - p_{\text{a}}V_0),$$

где учтено, что в конечном состоянии внутренняя энергия газа в 2 раза меньше, чем в начальном (давление в 2 раза меньше при том же объеме), а работу газ совершал при давлениях $2p_\text{а}$ (при расширении) и $p_\text{а}$ (при сжатии). Учитывая, что $p_\text{а}V_0 = \frac{1}{3}U_0$, находим

$$Q' = \frac{19}{6}U_0.$$

Разбалловка: Доказано, что газ расширится до упоров – 5 баллов.
Понято, что процесс состоит из изобары ($2p_\text{а}$), изохоры, изохоры и изобары ($p_\text{а}$) – 5 баллов
Найдено Q' – 15 баллов (за расчет отдельных участков процесса дается часть баллов).

4. (25 баллов) Кольцо, которое может скользить без трения по неподвижной горизонтальной спице, и прикрепленный к ней с помощью нити шарик удерживают в положении, когда нить составляет угол 45° с вертикалью (см. рис.). Считая нить идеальной и массы шарика и кольца равными, найти ускорение кольца сразу после освобождения тел. Ускорение свободного падения равно g.



Ответ: Ускорение кольца равно $g/3$.

Решение: Обозначив через a_1 ускорение кольца, а через T силу натяжения нити, запишем второй закон Ньютона для кольца в проекции на направление спицы в виде

$$ma_1 = T\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ускорение шарика разложим на две компоненты – горизонтальную, которая равна по величине ускорению кольца a_1 и противоположна ему по направлению (в силу сохранения импульса системы в проекции на горизонтальную ось) и вертикальную, которую обозначим через a_2. Запишем второй закон Ньютона для шарика в проекции на вертикальную ось

$$ma_2 = mg - T\frac{\sqrt{2}}{2},$$

а также условие равенства проекций ускорений кольца и шарика на нить (кинематическую связь)

$$a_2\frac{\sqrt{2}}{2} - a_1\frac{\sqrt{2}}{2} = a_1\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из системы записанных уравнений находим, что $a_1 = g/3$.

Разбалловка: Записан второй закон Ньютона для кольца – 5 баллов.
Понято, что горизонтальная компонента
ускорения шарика равна ускорению кольца – 5 баллов
Записан второй закон Ньютона для шарика – 5 баллов.
Записано кинематическое соотношение – 5 баллов.
Найдено ускорение кольца – 5 баллов.