

## 9 класс

1. (25 баллов) При разрыве снаряда на поверхности земли осколки полетели во все стороны с одинаковой скоростью. В точку, находящуюся на расстоянии 250 м от места разрыва, упали два осколка с интервалом 10 с. Под какими углами к горизонту вылетели эти осколки? Чему равен радиус круга всех упавших осколков? Ускорение свободного падения считать равным  $10 \text{ м/с}^2$ .

**Ответ:** Осколки вылетели под углами  $\alpha_1 = 15^\circ$  и  $\alpha_2 = 75^\circ$ . Радиус круга равен 500 м.

**Решение:** Обозначим начальную скорость осколков через  $V_0$ , а углы вылета двух осколков через  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

**Решение:** Обозначим начальную скорость осколков через  $V_0$ , а углы вылета двух осколков через  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Приравнявая дальности полета двух осколков

$$\frac{V_0^2 \sin 2\alpha_1}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha_2}{g},$$

получаем, что  $\sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2$  и, следовательно,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$ . Учитывая также, что дальность полета  $L$  можно записать через времена полета осколков  $t_{1,2}$  как  $L = V_0 \cos \alpha_1 t_1 = V_0 \cos \alpha_2 t_2$ , получаем соотношение

$$t_2 - t_1 = \frac{L}{V_0} \left( \frac{1}{\cos \alpha_2} - \frac{1}{\cos \alpha_1} \right),$$

которое, с учетом полученной выше связи между углами, преобразуем к виду

$$t_2 - t_1 = \frac{L}{V_0} \left( \frac{1}{\sin \alpha_1} - \frac{1}{\cos \alpha_1} \right). \quad (1)$$

Используя формулу для времени полета осколка, запишем еще одно соотношение

$$t_2 - t_1 = \frac{2V_0}{g} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1),$$

которое преобразуем к виду

$$t_2 - t_1 = \frac{2V_0}{g} (\cos \alpha_1 - \sin \alpha_1), \quad (2)$$

Перемножая формулы (1) и (2), исключаем неизвестную скорость  $V_0$  и получаем уравнение для угла  $\alpha_1$ :

$$\frac{g(t_2 - t_1)^2}{2L} = \frac{(\cos \alpha_1 - \sin \alpha_1)^2}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}.$$

Подставляя численные значения  $t_2 - t_1 = 10 \text{ с}$ ,  $L = 250 \text{ м}$  и  $g = 10 \text{ м/с}^2$ , получаем

$$\frac{g(t_2 - t_1)^2}{2L} = 2.$$

При этом уравнение для угла  $\alpha_1$  сводится к простому виду

$$\sin 2\alpha_1 = 0,5,$$

откуда получаем  $2\alpha_1 = 30^\circ$ . Следовательно,  $\alpha_1 = 15^\circ$  и  $\alpha_2 = 75^\circ$ .

Радиус круга всех упавших осколков равен дальности полета осколков, вылетевших под углом  $45^\circ$ , т.е.

$$L_{\max} = \frac{V_0^2}{g}.$$

Поделив это соотношение на формулу для дальности полета осколков, вылетевших под углом  $\alpha_1$

$$L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha_1}{g},$$

получаем  $L_{\max} = L / \sin 2\alpha_1 = 2L = 500 \text{ м}$ .

**Разбалловка:** Получено соотношение  $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$  – 5 баллов.

Получено замкнутое уравнение для угла вылета осколка – 10 баллов.

Найдены углы вылета осколков – 5 баллов.

Найден радиус круга упавших осколков – 5 баллов.

2. (25 баллов) В схеме, приведенной на рисунке, два резистора имеют сопротивления по 30 Ом и два – по 60 Ом; сопротивления амперметров пренебрежимо малы. После подключения к точкам А и В источника постоянного напряжения токи через амперметры оказались различными, меньший равен 1 А. Найти напряжение источника.

**Ответ:** Напряжение источника равно 330 В.

**Решение:** Схему цепи удобно перерисовать так, как показано на рисунке. Верхняя, средняя и нижняя ветви цепи включены параллельно, поэтому напряжения на них одинаковы. Поскольку показания амперметров различны, сопротивления резисторов в верхней и нижней ветвях также различны, причем последовательно с амперметром, показывающим меньший ток 1 А, включен резистор с большим сопротивлением 60 Ом.

Находим напряжение на этом резисторе – оно равно 60 В. Поскольку напряжение на амперметре пренебрежимо мало (в силу малости его сопротивления), таким же является и напряжение на всей ветви (например, верхней), содержащей резистор 60 Ом и амперметр, а значит и на остальных (подключенных параллельно) ветвях. Отсюда находим, что через нижнюю ветвь, содержащую резистор с сопротивлением



30 Ом, протекает ток 2 А. Ток в средней ветви равен сумме токов в верхней и нижней ветвях, т.е. составляет 3 А. При этом на резисторах 30 и 60 Ом в средней ветви падают напряжения 90 и 180 В соответственно, т.е. в сумме 270 В. Напряжение источника находим как  $270 + 60 = 330$  В.

**Разбалловка:** Понято, что последовательно с амперметрами включены разные сопротивления – 5 баллов.

Найдено напряжение на средней ветви – 5 баллов.

Найден ток через среднюю ветвь – 5 баллов.

Найдено напряжение источника – 10 баллов.

**3. (25 баллов)** Тонкостенный шар плавает в воде, погружившись на треть своего объема. Через образовавшуюся течь в шар начинает поступать вода. Разница уровней воды снаружи и внутри шара сначала уменьшается, а затем растет. Считая объем шара равным  $V$ , найти объем воды, поступившей в шар к моменту, когда разница уровней воды снаружи и внутри шара становится минимальной. Найти объем поступившей воды, при котором шар утонет.

**Ответ:** Объем поступившей в шар воды равен  $V/3$ . Шар утонет при заполнении водой объема  $2V/3$ .

**Решение:** Вес поступающей в шар воды компенсируется возрастанием силы Архимеда за счет большего погружения шара. Толщина слоя воды в шаре растет быстрее со временем, чем глубина погружения шара, пока площадь зеркала воды внутри шара меньше площади сечения шара на уровне воды снаружи. При этом разница уровней воды снаружи и внутри уменьшается. После того, как площадь зеркала воды внутри шара сравняется с площадью сечения шара на уровне воды снаружи, разница уровней начнет возрастать.

Чтобы выразить сказанное математически, обозначим через  $v_{\text{пост.}}$  объем поступившей в шар воды, а через  $v_{\text{погр.}}$  объем погруженной части шара. Запишем условие плавания шара в виде

$$v_{\text{пост.}} + V/3 = v_{\text{погр.}},$$

где учтено, что вес оболочки шара компенсируется погружением  $1/3$  объема шара. Условие равенства площади зеркала воды внутри шара и площади сечения шара на уровне воды снаружи можно записать в виде

$$v_{\text{пост.}} + v_{\text{погр.}} = V.$$

Из составленных уравнений находим  $v_{\text{пост.}} = V/3$ .

Чтобы найти объем  $v_{\text{пост.}}$ , при котором шар утонет, положим  $v_{\text{погр.}} = V$  в условии плавания. В результате получим  $v_{\text{пост.}} = 2V/3$ .

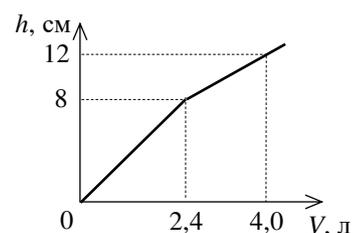
**Разбалловка:** Записано условие плавания шара – 5 баллов.

Понято, что минимальная разница уровней воды достигается в момент равенства площадей зеркала воды внутри и сечения шара на уровне воды снаружи – 10 баллов.

Найден соответствующий объем поступившей воды – 5 баллов.

Найден объем поступившей воды, при котором шар утонет - 5 баллов.

**4. (25 баллов)** В цилиндрический сосуд, на дне которого лежит куб, начинают наливать воду. График зависимости высоты  $h$  уровня воды в сосуде от объема  $V$  налитой воды приведен на рисунке. Найти плотность материала куба.



**Ответ:** Плотность материала куба равна  $800 \text{ кг/м}^3$ .

**Решение:** Обозначим через  $S_{\text{д}}$  площадь дна сосуда, а через  $S_{\text{к}}$  площадь основания куба. Участок графика 0-2,4 л соответствует заполнению объема над занятой кубом частью площади дна  $S_{\text{д}} - S_{\text{к}}$  до уровня 8 см. Находим  $S_{\text{д}} - S_{\text{к}} = 2,4 \text{ л} : 0,8 \text{ дм} = 3 \text{ дм}^2$ . Поскольку на участке 2,4-4,0 л уровень воды растет медленнее, то вода начинает заполнять объем с большей площадью основания  $S_{\text{д}}$ . Это возможно в двух случаях: либо уровень воды поднимается выше кубика, либо кубик начинает плавать, и вода занимает объем под ним. В любом случае, получаем  $S_{\text{д}} = (4,0 - 2,4) \text{ л} : 0,4 \text{ дм} = 4 \text{ дм}^2$ . Используя ранее найденное значение  $S_{\text{д}} - S_{\text{к}} = 3 \text{ дм}^2$ , находим, что  $S_{\text{к}} = 1 \text{ дм}^2$ , т.е. ребро куба равно 1 дм. Поскольку эта величина больше 8 см, приходим к выводу, что при  $h = 8$  см куб начал всплывать. Поскольку при этом погруженный объем куба составляет 0,8 объема куба, плотность материала куба равна 0,8 плотности воды, т.е.  $800 \text{ кг/м}^3$ .

**Разбалловка:** По участку графика 0-2,4 л найдена разница площадей дна и основания куба – 5 баллов.

По участку графика 2,4-4,0 л найдена площадь дна сосуда – 5 баллов.

Понято, что куб всплывает – 5 баллов.

Найдено ребро куба – 5 баллов.

Найдена плотность материала куба – 5 баллов.