

10 класс

1. (30 баллов) Скорость брошенного под углом к горизонту тела составила $3/4$ от начальной при подъеме на половину максимальной высоты. Найти отношение начальной скорости к скорости тела на максимальной высоте.

Ответ: Отношение скоростей равно $2\sqrt{2}$.

Решение: Обозначив через V_{0x} и V_{0y} горизонтальную и вертикальную компоненты начальной скорости тела, а через V_y вертикальную компоненту скорости на половине максимальной высоты подъема H , запишем следующие соотношения:

$$V_{0y}^2 - V_y^2 = 2g \frac{H}{2}, \quad V_{0y}^2 = 2gH.$$

Отсюда находим, что $V_y^2 = \frac{V_{0y}^2}{2}$. Учитывая, что горизонтальная компонента скорости не меняется во время полета, выразим полную скорость на высоте $H/2$ как

$$\sqrt{V_{0x}^2 + \frac{V_{0y}^2}{2}}.$$

По условию задачи эта скорость равна $\frac{3}{4}\sqrt{V_{0x}^2 + V_{0y}^2}$, т.е.

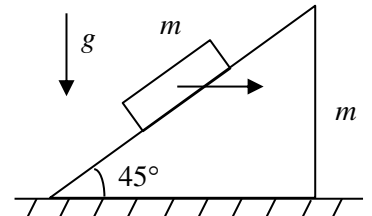
$$\sqrt{V_{0x}^2 + \frac{V_{0y}^2}{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{V_{0x}^2 + V_{0y}^2}.$$

Из последнего соотношения находим, что $V_{0y}/V_{0x} = \sqrt{7}$. Искомое отношение равно $\frac{V_0}{V_{0x}} = \frac{\sqrt{V_{0x}^2 + V_{0y}^2}}{V_{0x}} =$

$$\sqrt{1 + \frac{V_{0y}^2}{V_{0x}^2}} = 2\sqrt{2}.$$

Разбалловка: Найдена связь вертикальных компонент начальной скорости и скорости на высоте $H/2$ – 10 баллов.
Учтено сохранение горизонтальной скорости – 5 баллов.
Получено уравнение связи V_{0x} и V_{0y} – 10 баллов.
Получен правильный ответ – 5 баллов.

2. (30 баллов) Брусок массы m положили на гладкую наклонную грань клина той же массы с углом 45° при основании, расположенного на гладком горизонтальном столе, и приложили к нему горизонтальную силу (см. рис.). Чему равно ускорение бруска, если оно оказалось направленным вертикально? Ускорение свободного падения равно g .



Ответ: Ускорение бруска равно $g/2$.

Решение: Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекции на вертикальную ось

$$ma_1 = mg - N \frac{\sqrt{2}}{2},$$

где a_1 – ускорение бруска и N – сила давления клина на брусок. Запишем далее второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонтальную ось

$$ma_2 = N \frac{\sqrt{2}}{2},$$

где a_2 – ускорение клина. Из условия равенства проекций ускорений бруска и клина на ось, перпендикулярную наклонной грани клина (кинематическая связь), следует, что

$$a_1 = a_2.$$

Из системы записанных уравнений находим, что $a_1 = g/2$.

Разбалловка: Записан второй закон Ньютона для бруска в проекции на вертикаль – 5 баллов.
Записан второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонталь – 5 баллов.
Записана связь ускорений – 15 баллов.
Получен правильный ответ – 5 баллов.

3. (40 баллов) Гантель в виде жесткого невесомого стержня с двумя шариками на концах стоит вертикально на гладком горизонтальном столе. Масса нижнего шарика вдвое больше массы верхнего. Из-за неустойчивости гантель приходит в движение. Какой угол будет составлять с вертикалью стержень гантели в момент, когда скорость верхнего шарика будет направлена под углом 45° к вертикали?

Ответ: Тангенс искомого угла равен $2/3$.

Решение: Чтобы вектор скорости верхнего шарика составлял угол 45° с вертикалью, горизонтальная и вертикальная компоненты скорости этого шарика должны быть равны по величине. Из закона сохранения импульса по горизонтали следует, что скорость нижнего шарика должна быть в 2 раза меньше горизонтальной компоненты скорости верхнего шарика. Обозначим компоненты скорости верхнего шарика через V , а угол отклонения стержня от вертикали через α . Из неизменности длины стержня следует равенство проекций скоростей шариков на направление стержня, т.е.

$$0,5V\sin\alpha = V\cos\alpha - V\sin\alpha.$$

Отсюда получаем $\operatorname{tg}\alpha = 2/3$.

Разбалловка: Использовано равенство горизонтальной и вертикальной компонент скорости верхнего шарика – 5 баллов.
Учтено соотношение горизонтальных компонент скоростей шариков – 10 баллов.
Записана кинематическая связь – 20 баллов.
Получен правильный ответ – 5 баллов.