10 класс

1. (25 баллов) При разрыве снаряда на поверхности земли осколки полетели во все стороны с одинаковой скоростью. В точку, находящуюся на расстоянии 250 м от места разрыва, упали два осколка с интервалом 10 с. Под какими углами к горизонту вылетели эти осколки? Чему равен радиус круга всех упавших осколков? Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Ответ: Осколки вылетели под углами $\alpha_1 = 15°$ и $\alpha_2 = 75°$. Радиус круга равен 500 м.

Решение: Обозначим начальную скорость осколков через V_0, а углы вылета двух осколков через α_1 и α_2. Приравнивая дальности полета двух осколков

$$\frac{V_0^2 \sin 2\alpha_1}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha_2}{g},$$

получаем, что $\sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2$ и, следовательно, $\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$. Учитывая также, что дальность полета L можно записать через времена полета осколков $t_{1,2}$ как $L = V_0 \cos\alpha_1 t_1 = V_0 \cos\alpha_2 t_2$, получаем соотношение

$$t_2 - t_1 = \frac{L}{V_0}\left(\frac{1}{\cos\alpha_2} - \frac{1}{\cos\alpha_1}\right),$$

которое, с учетом полученной выше связи между углами, преобразуем к виду

$$t_2 - t_1 = \frac{L}{V_0}\left(\frac{1}{\sin\alpha_1} - \frac{1}{\cos\alpha_1}\right). \qquad (1)$$

Используя формулу для времени полета осколка, запишем еще одно соотношение

$$t_2 - t_1 = \frac{2V_0}{g}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1),$$

которое преобразуем к виду

$$t_2 - t_1 = \frac{2V_0}{g}(\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1), \qquad (2)$$

Перемножая формулы (1) и (2), исключаем неизвестную скорость V_0 и получаем уравнение для угла α_1:

$$\frac{g(t_2 - t_1)^2}{2L} = \frac{(\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1)^2}{\sin\alpha_1 \cos\alpha_1}.$$

Подставляя численные значения $t_2 - t_1 = 10$ с, $L = 250$ м и $g = 10$ м/с^2, получаем

$$\frac{g(t_2 - t_1)^2}{2L} = 2.$$

При этом уравнение для угла α_1 сводится к простому виду

$$\sin 2\alpha_1 = 0{,}5,$$

откуда получаем $2\alpha_1 = 30°$. Следовательно, $\alpha_1 = 15°$ и $\alpha_2 = 75°$.

Радиус круга всех упавших осколков равен дальности полета осколков, вылетевших под углом 45°, т.е.

$$L_{\max} = \frac{V_0^2}{g}.$$

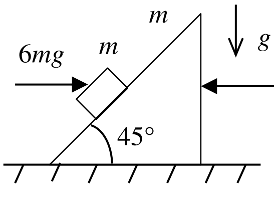
Поделив это соотношение на формулу для дальности полета осколков, вылетевших под углом α_1

$$L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha_1}{g},$$

получаем $L_{\max} = L/\sin 2\alpha_1 = 2L = 500$ м.

Разбалловка: Получено соотношение $\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$ – 5 баллов.
Получено замкнутое уравнение для угла вылета осколка – 10 баллов.
Найдены углы вылета осколков – 5 баллов.
Найден радиус круга упавших осколков – 5 баллов.

2. (25 баллов) Брусок массы m находится на наклонной грани клина той же массы с углом 45° при основании, расположенного на горизонтальном столе. Коэффициент трения между бруском и клином равен 0,5, трение между клином и столом отсутствует. К бруску и клину во встречных направлениях приложены горизонтальные силы, величина одной из которых равна $6mg$, где g – ускорение свободного падения (см. рис.). Чему равна величина другой силы, если ускорение бруска направлено вертикально?



Ответ: Величина силы равна $7mg$.

Решение: Обозначив через N силу давления клина на брусок, а через μ коэффициент трения ($\mu = 0{,}5$), запишем второй закон Ньютона для бруска в проекции на горизонтальную ось

$$0 = 6mg - N\frac{\sqrt{2}}{2} - \mu N\frac{\sqrt{2}}{2}$$

и на вертикальную (направленную вверх) ось

$$ma_1 = N\frac{\sqrt{2}}{2} - \mu N\frac{\sqrt{2}}{2} - mg,$$

где a_1 – ускорение бруска. В записанных соотношениях учтено, что ускорение бруска направлено по вертикали (вверх) и сила трения скольжения равна μN и направлена вдоль наклонной грани клина (вниз). Второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонтальную (направленную влево) ось запишем в виде

$$ma_2 = F - N\frac{\sqrt{2}}{2} - \mu N\frac{\sqrt{2}}{2},$$

где a_2 – ускорение клина. Из условия равенства проекций ускорений бруска и клина на ось, перпендикулярную наклонной грани клина (кинематическая связь), следует, что

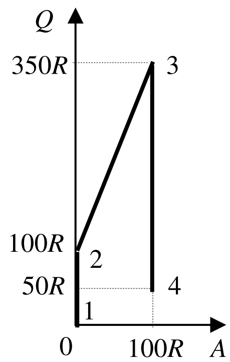
$$a_1 = a_2.$$

Из системы записанных уравнений находим, что $F = 7mg$. При этом $a_1 = a_2 = g$, $N = 4\sqrt{2}mg$.

Если предположить, что ускорение бруска направлено вниз, а ускорение клина вправо, то можно прийти к ответу $F = 24mg$. Получающиеся при этом отрицательные значения ускорений $a_1 = a_2 = -17g$ говорят об ошибочности предположения и неверности ответа $F = 24mg$.

Разбалловка: Записан второй закон Ньютона для бруска в проекции на горизонталь – 5 баллов.
Записан второй закон Ньютона для бруска в проекции на вертикаль – 5 баллов.
Записан второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонталь – 5 баллов.
Записана связь ускорений – 5 баллов.
Получен правильный ответ – 5 баллов.

3. (25 баллов) В ходе некоторого процесса 1-2-3-4 полученное одним молем идеального одноатомного газа тепло Q и совершенная газом работа A изменялись так, как показано на рисунке (R – молярная газовая постоянная). Найти разность максимальной и минимальной температур газа в ходе процесса. Найти изменение температуры газа в результате процесса.



Ответ: Разность максимальной и минимальной температур равна 200 К. Изменение температуры в результате процесса равно $-\frac{100}{3}$ К.

Решение: По первому принципу термодинамики приращение внутренней энергии газа на участках находится как разность между полученным на участке теплом ΔQ и работой:

$$\Delta U = \Delta Q - A.$$

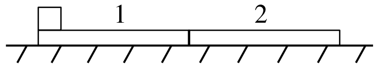
Учитывая, что $\Delta U = \frac{3}{2}R\Delta T$, где ΔT – изменение температуры газа, находим изменения температуры газа на каждом участке:

$$\Delta T_{12} = \frac{200}{3}\text{ К}, \qquad \Delta T_{23} = 100\text{ К}, \qquad \Delta T_{34} = -200\text{ К}.$$

Заключаем, что температура максимальна в точке 3 и минимальна в точке 4, разница максимальной и минимальной температур равна 200 К. Изменение температуры газа в результате всего процесса равно $\frac{200}{3} + 100 - 200 = -\frac{100}{3}$ К.

Разбалловка: Найдено изменение температуры на каждом участке – по 5 баллов за участок.
Найдена разность максимальной и минимальной температур – 5 баллов.
Найдено изменение температуры в результате процесса – 5 баллов.

4. (25 баллов) Две одинаковые доски лежат на гладком горизонтальном столе, соприкасаясь торцами (см. рис.). Брусок, масса которого равна массе доски, толкают вдоль досок с конца доски 1 с такой скоростью, что он, проскользив по обеим доскам, остается на конце доски 2. Какая часть первоначальной кинетической энергии бруска выделилась в виде тепла? Чему равно отношение работ, совершенных над бруском досками 1 и 2?



Ответ: В виде тепла выделилось 4/7 первоначальной кинетической энергии бруска. Отношение работы доски 1 к работе доски 2 равно $\frac{16}{13+5\sqrt{7}} \approx 0{,}6$.

Решение: Обозначим через V_0 начальную скорость бруска, через V_1 его скорость после прохождения первой доски, через V_2 скорость первой доски после прохождения по ней бруска и через V_3 скорость бруска и второй доски после остановки бруска на доске. Задачу удобно решать, рассматривая относительное движение бруска и досок. При движении бруска по доскам на него действует сила трения величины μmg (μ - коэффициент трения между бруском и доской, m – масса бруска, g – ускорение свободного падения), которая замедляет брусок с ускорением μg. При движении бруска по доске 1 та же сила трения разгоняет обе доски с ускорением $0{,}5\mu g$ (суммарная масса досок вдвое больше массы бруска). Таким образом, при движении бруска по доске 1 относительное ускорение бруска и досок равно $1{,}5\mu g$. При этом относительная скорость бруска и досок меняется от V_0 в начале движения до $V_1 - V_2$ в конце движения по доске 1. Можно записать соотношение

$$(V_1 - V_2)^2 - V_0^2 = -2 \cdot 1{,}5\mu g L,$$

где L – длина доски. При движении бруска по доске 2 она разгоняется с ускорением μg, и относительное ускорение бруска и доски равно $2\mu g$. Относительная скорость меняется от $V_1 - V_2$ до 0. При этом справедливо соотношение

$$-(V_1 - V_2)^2 = -2 \cdot 2\mu g L.$$

Складывая записанные соотношения, находим, что

$$V_0^2 = 7\mu g L,$$

а затем, используя полученную формулу и любое из записанных соотношений, получаем связь скоростей в виде

$$V_1 - V_2 = \frac{2}{\sqrt{7}} V_0.$$

Записывая далее закон сохранения импульса для взаимодействия бруска сначала с досками 1 и 2, а затем с доской 2, получаем следующие соотношения:

$$V_0 = V_1 + 2V_2, \qquad V_1 + V_2 = 2V_3.$$

Поученные уравнения связи между скоростями позволяют выразить скорости как

$$V_1 = \frac{\sqrt{7}+4}{3\sqrt{7}} V_0, \quad V_2 = \frac{\sqrt{7}-2}{3\sqrt{7}} V_0, \quad V_3 = \frac{\sqrt{7}+1}{3\sqrt{7}} V_0.$$

Выделившееся тепло равно убыли кинетической энергии системы:

$$Q = \frac{mV_0^2}{2} - \frac{mV_2^2}{2} - \frac{2mV_3^2}{2}.$$

Проще, однако, рассчитать Q как взятую с обратным знаком работу действующей на кубик силы трения при его суммарном перемещении $2L$ относительно досок 1 и 2:

$$Q = 2\mu m g L = \frac{4}{7} \frac{mV_0^2}{2}.$$

Как видно, выделившееся тепло составляет 4/7 первоначальной кинетической энергии бруска $mV_0^2/2$.

Работу доски 1 над бруском записываем через изменение его кинетической энергии как

$$A_1 = \frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -8\frac{5-\sqrt{7}}{63}\frac{mV_0^2}{2}.$$

Работу доски 2 над бруском записываем через изменение его кинетической энергии как

$$A_2 = \frac{mV_3^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = -\frac{5+2\sqrt{7}}{21}\frac{mV_0^2}{2}.$$

Отношение работ равно $\frac{A_1}{A_2} = \frac{16}{13+5\sqrt{7}} \approx 0{,}6$.

Разбалловка: Скорости бруска после прохождения досок 1 и 2 выражены через начальную – 10 баллов.
Найдено выделившееся тепло – 5 баллов.
Найдено отношение работ – 10 баллов.