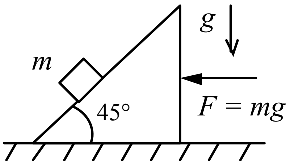
11 класс

1. (30 баллов) Брусок массы m положили на гладкую наклонную грань клина пренебрежимо малой массы, расположенного на гладком горизонтальном столе, и приложили к клину горизонтальную силу $F = mg$, где g – ускорение свободного падения (см. рис.). Найти ускорение бруска и силу, с которой клин давит на стол.



Ответ: Ускорение бруска равно g и направлено горизонтально в направлении действия силы F. Клин давит на стол с силой mg.

Решение: Сумма сил, действующих на клин пренебрежимо малой массы, должна быть равна нулю, иначе клин получит бесконечное ускорение. Пусть N – сила, с которой брусок давит на клин (перпендикулярно наклонной грани клина вправо-вниз). Тогда из условия равенства нулю суммы сил, действующих на клин в горизонтальном направлении, т.е. из равенства

$$N\frac{\sqrt{2}}{2} - F = 0,$$

следует, что $N = \sqrt{2}mg$. Из условия равенства нулю суммы сил, действующих на клин в вертикальном направлении, следует, что сила со стороны стола на клин равна вертикальной компоненте силы N, т.е. mg. С такой же по величине силой и клин давит на стол.

Клин действует на брусок с силой, равной по величине $N = \sqrt{2}mg$ и направленной перпендикулярно наклонной грани клина влево-вверх. Вертикальная компонента этой силы равна mg и уравновешивает действующую на брусок силу тяжести. Горизонтальная же компонента, также равная mg, сообщает бруску ускорение, равное по величине g и направленное влево.

Разбалловка: Понято, что сумма сил на клин должна равняться нулю – 10 баллов.
Найдена величина силы N – 5 баллов.
Найдена сила давления клина на стол – 5 баллов.
Найдено направление ускорения бруска – 5 баллов.
Найдена величина ускорения бруска – 5 баллов.

2. (40 баллов) Два разноименных точечных заряда, величины которых отличаются в 4 раза, расположены на расстоянии d друг от друга. Найти минимальное расстояние между меньшим по модулю зарядом и эквипотенциальной поверхностью нулевого потенциала. Потенциал на бесконечности принять равным нулю.

Ответ: Минимальное расстояние между зарядом q и эквипотенциальной поверхностью нулевого потенциала равно $d/5$.

Решение: Обозначим заряды через q и $-4q$. Используя принцип суперпозиции для потенциала и формулу для потенциала поля точечного заряда, запишем уравнение для определения геометрического места точек с нулевым потенциалом в виде

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{4q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = 0,$$

где R_1 и R_2 – расстояния до произвольной точки с нулевым потенциалом от зарядов q и $-4q$ соответственно (ε_0 - электрическая постоянная). Из данного уравнения получаем, что $R_2 = 4R_1$. Отсюда следует, что R_1 минимально тогда, когда R_2 тоже минимально. Это означает, что ближайшая к заряду q точка с нулевым потенциалом находится между зарядами на прямой, соединяющей эти заряды. В этом случае $R_1 + R_2 = d$ и $R_1 = d/5$.

Разбалловка: Использован принцип суперпозиции для потенциала – 5 баллов.
Записана формула для потенциала точечного заряда – 5 баллов.
Понято, что нужная точка с нулевым потенциалом находится между зарядами – 10 баллов.
Записано одно уравнение для нахождения R_1 и R_2 – 5 баллов.
Записано второе уравнение для нахождения R_1 и R_2 – 5 баллов.
Найдено искомое расстояние – 10 баллов.

3. (30 баллов) Два одинаковых пружинных маятника с периодом колебаний T представляют собой лежащие на гладком горизонтальном столе и прикрепленные к стенке пружинами бруски. Колебания маятников возбуждают, сообщив каждому из брусков одну и ту же скорость в направлении от стенки с задержкой в $T/4$. Через какое время после начала движения первого бруска относительная скорость брусков достигнет максимального значения?

Ответ: Через время $3T/8$.

Решение: Будем считать, что движение первого бруска начинается в момент $t = 0$. Направим ось x от стенки и запишем скорости брусков в проекции на эту ось в виде

$$V_{1x} = V_0 \cos \omega t, \qquad V_{2x} = V_0 \cos \omega \left(t - \frac{T}{4}\right) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Здесь через V_0 обозначена начальная скорость бруска, а через ω – угловая частота колебаний ($\omega = 2\pi/T$). Относительная скорость брусков равна

$$V_{\text{отн}} = |V_{2x} - V_{1x}| = V_0 \left|\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - \cos \omega t\right| = 2V_0 \sin\frac{\pi}{4}\left|\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)\right| = \sqrt{2}V_0 \left|\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Данное выражение, очевидно, достигает в первый раз максимума при $\omega t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, т.е. при $t = 3T/8$.

Исследование относительной скорости как функции времени на максимум можно провести также с помощью производной. В этом случае момент достижения максимума определяется уравнением $\mathrm{tg}\,\omega t = -1$.

Разбалловка: Записана скорость первого бруска – 5 баллов.
Записана скорость второго бруска – 10 баллов.
Записано выражение для относительной скорости брусков – 5 баллов.
Получено выражение для аргумента синуса – 5 баллов.
Найден искомый момент времени – 5 баллов.