

10 класс

1. (30 баллов) Под каким углом к горизонту было брошено тело, если в течение трети времени полета высота тела над землей была меньше его текущей горизонтальной удаленности от точки броска?

Ответ: Угол броска α определяется соотношением $\operatorname{tg}\alpha = 3$, т.е. $\alpha \approx 72^\circ$.

Решение: Выберем ось x горизонтально и ось y вертикально с началом в точке броска. Считая, что бросок произвели в момент $t = 0$ со скоростью V_0 под углом α к горизонту, запишем текущее горизонтальное удаление $x(t)$ и текущую высоту $y(t)$ в виде

$$x = V_0 \cos \alpha t, \quad y = V_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2},$$

где g – ускорение свободного падения. Условие $x > y$ на трети времени полета может выполняться только на последней трети времени полета, т.е. $x = y$ в момент $t = \frac{2}{3} \frac{2V_0 \sin \alpha}{g}$. Из записанных соотношений находим, что $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

Разбалловка: Написана формула для текущей дальности – 5 баллов.

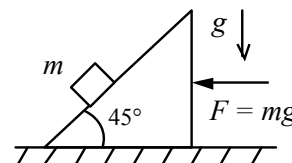
Написана формула для текущей высоты – 5 баллов.

Написана формула для времени полета – 5 баллов.

Понято, на каком участке полета $x > y$ – 10 баллов.

Получен правильный ответ – 5 баллов.

2. (30 баллов) Брусок массы m положили на гладкую наклонную грань клина пренебрежимо малой массы, расположенного на гладком горизонтальном столе, и приложили к клину горизонтальную силу $F = mg$, где g – ускорение свободного падения (см. рис.). Найти ускорение бруска и силу, с которой клин давит на стол.



Ответ: Ускорение бруска равно g и направлено горизонтально в направлении действия силы F . Клин давит на стол с силой mg .

Решение: Сумма сил, действующих на клин пренебрежимо малой массы, должна быть равна нулю, иначе клин получит бесконечное ускорение. Пусть N – сила, с которой брусок давит на клин (перпендикулярно наклонной грани клина вправо-вниз). Тогда из условия равенства нулю суммы сил, действующих на клин в горизонтальном направлении, т.е. из равенства

$$N \frac{\sqrt{2}}{2} - F = 0,$$

следует, что $N = \sqrt{2}mg$. Из условия равенства нулю суммы сил, действующих на клин в вертикальном направлении, следует, что сила со стороны стола на клин равна вертикальной компоненте силы N , т.е. mg . С такой же по величине силой и клин давит на стол.

Клин действует на брусок с силой, равной по величине $N = \sqrt{2}mg$ и направленной перпендикулярно наклонной грани клина влево-вверх. Вертикальная компонента этой силы равна mg и уравнивает действующую на брусок силу тяжести. Горизонтальная же компонента, также равная mg , сообщает бруску ускорение, равное по величине g и направленное влево.

Разбалловка: Понято, что сумма сил на клин должна равняться нулю – 10 баллов.

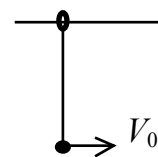
Найдена величина силы N – 5 баллов.

Найдена сила давления клина на стол – 5 баллов.

Найдено направление ускорения бруска – 5 баллов.

Найдена величина ускорения бруска – 5 баллов.

3. (40 баллов) Шарик висит на идеальной нити, прикрепленной к кольцу, которое может скользить без трения по неподвижной горизонтальной спице. Массы шарика и кольца равны. После того, как шарик сообщили скорость V_0 вдоль спицы (см. рис.), максимальный угол отклонения нити от вертикали оказался равным 90° . Найти скорость шарика в момент, когда нить в первый раз составляла с вертикалью угол 60° .



Ответ: Скорость шарика равнялась $\frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{27+2\sqrt{14}}{14}}$.

Решение: Найдем вначале длину нити. Для это свяжем законами сохранения энергии и импульса начальное состояние системы и состояние с максимальным (на 90°) отклонением нити:

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{mV_1^2}{2} + mgL, \quad mV_0 = mV_1 + mV_1.$$

Здесь учтено, что из-за неразрывности нити шарик и кольцо имеют одинаковую скорость (V_1) в положении максимального отклонения и через m , g и L обозначены масса каждого из тел, ускорение свободного падения и длина нити. Из записанных уравнений находим, что $L = \frac{V_0^2}{4g}$.

Рассмотрим теперь состояние системы с отклонением нити на 60° . Запишем законы сохранения энергии и импульса в виде

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV_k^2}{2} + \frac{mV_r^2}{2} + \frac{mV_b^2}{2} + mgL(1 - \cos 60^\circ), \quad mV_0 = mV_k + mV_r,$$

где через V_k обозначена скорость кольца, а через V_r и V_b – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости шарика. Запишем также кинематическую связь – условие равенства скоростей кольца и шарика в проекции на нить:

$$V_k \sin 60^\circ = V_r \sin 60^\circ - V_b \cos 60^\circ.$$

Здесь учтено, что вертикальная скорость шарика направлена вверх при первом прохождении положения с отклонением нити на 60° . Исключая из записанных уравнений, например, V_k и V_b , приходим к квадратному уравнению для V_r :

$$56V_r^2 - 56V_0V_r + 13V_0^2 = 0,$$

откуда получаем

$$V_r = \frac{14 \pm \sqrt{14}}{28} V_0 = \frac{\sqrt{14} \pm 1}{2\sqrt{14}} V_0.$$

Чтобы выбрать правильное значение знака, подставим полученное выражение в формулу для вертикальной компоненты скорости $V_b = \sqrt{3}(2V_r - V_0)$, которая следует из записанных выше уравнений сохранения импульса и кинематической связи. В результате получим

$$V_b = \pm \sqrt{\frac{3}{14}} V_0.$$

Из условия $V_b > 0$ (шарик движется вверх в рассматриваемом положении) следует, что в полученных решениях для V_r и V_b нужно выбрать верхний знак. Таким образом, для компонент скорости окончательно имеем

$$V_r = \frac{\sqrt{14} + 1}{2\sqrt{14}} V_0, \quad V_b = \sqrt{\frac{3}{14}} V_0.$$

Величина скорости шарика $V_{ш}$ находится как

$$V_{ш} = \sqrt{V_r^2 + V_b^2} = \frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{27 + 2\sqrt{14}}{14}}.$$

Разбалловка: Записано хотя бы одно правильное уравнение для положения 90° – 5 баллов.

Найдена длина нити – 5 баллов.

Записан закон сохранения энергии для положения 60° – 5 баллов.

Записан закон сохранения импульса для положения 60° – 5 баллов.

Записана кинематическая связь для положения 60° – 5 баллов.

Получено квадратное уравнение для одной из скоростей – 5 баллов

Выбран правильный знак в решении уравнения – 5 баллов

Получен правильный ответ – 5 баллов.