

10 класс

1. (25 баллов) Тело, брошенное под углом к горизонту в момент $t = 0$ с начальной скоростью V_0 , в моменты t_1 и t_2 находилось на одинаковом удалении от точки броска. Найти время полета тела. При каком условии на угол между начальной скоростью и горизонтом одинаковое удаление от точки броска достигается в ходе полета не один раз? Ускорение свободного падения равно g .

Ответ: Время полета равно $t_{\text{п}} = \frac{t_1+t_2}{t_1^2+t_1t_2+t_2^2} \left(\frac{2V_0^2}{g^2} + \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2) \right)$. Угол броска α должен удовлетворять условию $\sin \alpha > \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Решение: Удаление ℓ тела от точки броска зависит от времени t по закону

$$\ell(t) = \sqrt{(V_0 \cos \alpha t)^2 + (V_0 \sin \alpha t - gt/2)^2} = \sqrt{V_0^2 t^2 - gV_0 \sin \alpha t^3 + g^2 t^4 / 4},$$

где α - угол броска (угол между начальной скоростью и горизонтом). Приравнявая удаления в моменты времени t_1 и t_2 , находим время полета

$$t_{\text{п}} = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g} = \frac{t_1+t_2}{t_1^2+t_1t_2+t_2^2} \left(\frac{2V_0^2}{g^2} + \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2) \right).$$

Полагая $t_1 = t_2 = t_0$, из предыдущей формулы получаем

$$\sin \alpha = \frac{2V_0}{3gt_0} + \frac{gt_0}{3V_0} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\sqrt{2}V_0}{gt_0} + \frac{gt_0}{\sqrt{2}V_0} \right).$$

В скобке находится сумма взаимобратных положительных величин, поэтому минимальное значение скобки равно 2, а минимальное значение $\sin \alpha$ равно $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Разбалловка: Записано выражение для удаления – 5 баллов.

Найдено время полета – 5 баллов.

Записано условие $t_1 = t_2$ – 5 баллов.

Найдено минимальное значение $\sin \alpha$ – 5 баллов.

Записано неравенство для $\sin \alpha$ – 5 баллов.

2. (25 баллов) Падающий вертикально шарик абсолютно упруго соударяется с гладкой наклонной гранью клина, лежащего на гладком горизонтальном столе. Массы шарика и клина равны. При каком угле при основании клина приобретенная клином кинетическая энергия составит наибольшую долю от кинетической энергии, которая была у шарика перед его ударом о клин? Считать, что удар шарика не вызывает вращения клина.

Ответ: Искомый угол α определяется соотношением $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2}$.

Решение: Выберем ось y вертикально вниз, а ось x горизонтально, в сторону уклона клина. Обозначив скорость шарика перед ударом через V_0 , запишем условие сохранения кинетической энергии при абсолютно упругом соударении шарика и клина

$$V_0^2 = V_x^2 + V_y^2 + u^2,$$

где V_x , V_y – компоненты скорости шарика после удара, а u – величина скорости клина (учтено равенство масс шарика и клина). Из сохранения проекции импульса на ось x следует, что

$$V_x = u.$$

Поскольку поверхность клина гладкая, сохраняется проекция скорости шарика на ось, параллельную наклонной грани клина, т.е.

$$V_0 \sin \alpha = V_y \sin \alpha + V_x \cos \alpha.$$

Исключая из записанных соотношений V_x и V_y , получаем

$$u = \frac{\sqrt{2}V_0}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ctg}\alpha} + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{2}}\right)}.$$

В знаменателе стоит сумма положительных взаимобратных величин, поэтому при фиксированном V_0 дробь, а значит и u , достигают максимума при $\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ctg}\alpha} = 1$, т.е. при $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2}$.

Разбалловка: Записан закон сохранения энергии – 5 баллов.

Записан закон сохранения импульса в проекции на горизонталь – 5 баллов.

Записано сохранение компоненты скорости вдоль наклонной грани клина – 5 баллов.

Скорость клина выражена через скорость шарика перед ударом – 5 баллов.

Найдено значение угла – 5 баллов.

3. (25 баллов) Один моль идеального газа совершает циклический процесс (см. рис.) с заданными значениями p_1 , V_1 и $V_2 = 2V_1$. Изобразить данный процесс, откладывая по оси абсцисс температуру газа, а по оси ординат – совершенную газом работу. Молярную газовую постоянную R считать известной.

Ответ См. рисунок, где $T_1 = p_1 V_1 / R$.

Решение: На участке 1-2 работа вычисляется как площадь трапеции

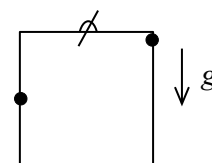
$A = \frac{p_1 + p}{2}(V - V_1) = \frac{R}{2}(T - T_1)$, т.е. график на этом участке – отрезок наклонной прямой. На участке 2-3 работа равна нулю, график – отрезок горизонтальной прямой. На участке 3-4 работа записывается как $A = p_1(V - 2V_1) = R(T - 2T_1)$, т.е. график – отрезок наклонной прямой.

Разбалловка: Нарисован участок 1-2 – 10 баллов.

Нарисован участок 2-3 – 5 баллов.

Нарисован участок 3-4 – 10 баллов.

4. (25 баллов) Жесткий проволочный квадрат пренебрежимо малой массы может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через дужку, прикрепленную к середине стороны квадрата. Две тяжелые бусинки массой m каждая закреплены на квадрате – одна на середине стороны, другая – около вершины квадрата (см. рис.). В некоторый момент бусинку, находящуюся около вершины, освобождают, и она начинает скользить по проволоке без трения. Найти силы, с которыми проволока действует на бусинку сразу после освобождения одной из них. Ускорение свободного падения равно g .



Ответ: Сила на закрепленную бусинку равна $mg \frac{\sqrt{2}}{2}$. Сила на освобожденную бусинку равна нулю.

Решение: Сразу после освобождения бусинки проволочный квадрат начинает поворачиваться с некоторым угловым ускорением против часовой стрелки. При этом линейное ускорение проволоки в месте нахождения освобожденной бусинки будет направлено вертикально вверх, так что на эту бусинку проволока действовать не будет. Закрепленная бусинка будет двигаться по окружности с центром на оси вращения квадрата. В начальный момент, когда скорость бусинки близка к нулю, ее ускорение чисто тангенциальное и направлено перпендикулярно прямой, проходящей через бусинку и ось вращения. Это ускорение создается только проекцией силы тяжести на тангенциальное направление. Проекция же силы со стороны квадрата на это направление равна нулю (в начальный момент), иначе на проволочный квадрат нулевой массы подействовал бы не равный нулю момент сил (освобожденная бусинка не взаимодействует с квадратом в начальный момент). Записывая условие баланса сил в проекции на направление к центру окружности, находим, что сила со стороны проволоки равна проекции силы тяжести на это направление, т.е. $mg \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Разбалловка: Найдено, что на освобожденную бусинку квадрат не действует – 10 баллов.

Найдено направление ускорения закрепленной бусинки – 5 баллов.

Найдена сила на закрепленную бусинку – 10 баллов.

